O okresowości w sensie Auslandera–Reiten algebr samoinjektywnych

na podstawie referatu Zygmunta Pogorzałego

22 października 2002

Przez K oznaczać będziemy ustalone ciało algebraicznie domknięte, zaś A oznacza bazową, spójną i nieprostą algebrę samoinjektywną.

Jeśli M jest A-modułem, to mówimy, że moduł M jest τ_A-okresowy, o ile istnieje $m > 0$ takie, że $\tau_A^m M \simeq M$, gdzie τ_A jest translacją Auslandera–Reiten. Analogicznie definiujemy Ω_A-okresowość, gdzie Ω_A jest syzygią. Przez A^e oznaczać będziemy algebrę obejmującą algebry A. Zauważmy, że kategorię $\operatorname{mod} A^e$ możemy utożsamiać z kategorią A-A-bimodułów. Niech $\alpha : A \to A$ i $\beta : A \to A$ będą automorfizmami algebry A. Wtedy ${}_\alpha A_\beta$ jest A-A-bimodułem z działaniem zdefiniowanym wzorem $a' * a * a'' = \alpha(a')a\beta(a'')$. Wiadomo, że ${}_\alpha A_1 \simeq A$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest automorfizmem wewnętrznym. Przez $\mathrm{HH}(A)$ oznaczamy algebrę kohomologii Hochschilda $\bigoplus_{i\geq 0} \operatorname{Ext}^i_{A^e}(A, A)$. Wiadomo, że $\mathrm{HH}(A) = \bigoplus_{i\geq 0} \underline{\operatorname{Hom}}_{A^e}(\Omega^i_{A^e} A, A)$. Mnożenie w powyższej algebrze zadane jest z wykorzystaniem funktora Ω_{A^e}. Można też rozważać algebrę $\mathbb{A}(\tau_{A^e}, M) = \bigoplus_{i\geq 0} \underline{\operatorname{Hom}}_{A^e}(\tau^i_{A^e} M, M)$.

Celem referatu jest wskazanie klasy algebr A, dla których A^e-moduł A nie jest Ω_{A^e}-okresowy oraz wyjaśnienie dlaczego τ_{A^e}-okresowość jest trudna do udowodnienia dla τ_{A^e}-ograniczonych modułów. Moduł M nazywamy τ_{A^e}-ograniczonym, o ile istnieje górne ograniczenie na wymiary modułów $\tau^i_{A^e} M$, $i \in \mathbb{Z}$. Motywacją dla tych badań jest fakt, że gdy moduł A jest Ω_{A^e}-okresowy, to w wielu sytuacjach $\mathrm{HH}(A)/\mathscr{N} \simeq K[X]$, gdzie $\mathscr{N}$ jest ideałem generowanym przez jednorodne elementy nilpotentne. Wiadomo, że jeśli A jest samoinjektywną algebrą standardową skończonego typu, to A jest Ω_{A^e} i τ_{A^e}-okresowym A^e-modułem.

Wiadomo, że dla dowolnej algebry A, $D(A) \simeq {}_1 A_{\nu_A}$, gdzie ν_A jest automorfizmem Nakayamy. Algebrę A-nazywamy n-symetryczną, o ile ν_A^n jest automorfizmem wewnętrznym. Przykładem algebry jest n-symetrycznej, która nie jest $(n-1)$-symetryczna, jest algebra $\hat{B}/(\nu_{\hat{B}}^n)$, gdzie B jest algebrą trójkątną.

Lemat. *Jeżeli A jest algebrą n-symetryczną, to dla każdego nierozkładalnego A-modułu M, $\tau_A^n M \simeq \Omega_A^{2n} M$.*

Lemat. *Niech A będzie algebrą n-symetryczną. Wtedy nierozkładalny A-moduł M jest τ_A-okresowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest Ω_A-okresowy.*

Auslander i Reiten pokazali, że dla każdego nierozkładalnego nieprojektywnego A-modułu X, $\tau_A X \simeq X \otimes_A \tau_{A^e} A$. Ponadto, jeśli X jest nierozkładalnym nieprojektywnym A^e-modułem, który jest projektywny z obu strony jako A-moduł, to $\tau_{A^e} X \simeq X \otimes_A \tau_{A^e} A$.

Lemat. *Jeżeli algebra A jest n-symetryczna, to A^{op} też.*

Twierdzenie. *Niech $n \geq 1$. Jeżeli algebra jest n-symetryczna, to A^e jest n-symetryczna.*

Twierdzenie. *Niech $n \geq 1$ i A będzie algebrą n-symetryczną. Jeżeli istnieje nierozkładalny nieprojektywny A-moduł M, który nie jest τ_A-okresowy, to A nie jest Ω_{A^e}-okresowy ani τ_{A^e}-okresowy.*

Dowód. Oczywiste ze wzoru $\tau_A X = X \otimes_A \tau_{A^e} A$. □

Lemat. *Niech Y będzie A^e-modułami bez projektywnych składników prostych, który jest projektywny z obu stron jako A-moduł. Jeżeli dla każdego nierozkładalnego nieprojektywnego A-modułu X, $X \otimes_A Y \simeq X$ w $\underline{\mathrm{mod}}\, A$, to istnieje automorfizm α algebry A taki, że $Y \simeq {}_\alpha A_1$.*

Stwierdzenie. *Jeśli istnieje $m \geq 1$ takie, że dla każdego nierozkładalnego nieprojektywnego A-modułu X, $\tau_A^m X \simeq X$, to prawy A^e-moduł A jest τ_{A^e}-ograniczony.*

Jeśli M i N są nieprojektywnymi A^e-modułami. Wtedy $\mathbb{A}(\tau_{A^e}, M, N) := \bigoplus_{i\geq 0} \underline{\mathrm{Hom}}_{A^e}(\tau_{A^e}^i M, N)$ jest prawym $\mathbb{A}(\tau_{A^e}, M)$-modułem.

Twierdzenie. *Dla prawego nieprojektywnego A^e-modułu M, który jest τ_{A^e}-ograniczony, następujące warunki są równoważne:*

(1) *M jest τ_{A^e}-okresowy;*

(2) *Algebra $\mathbb{A}(\tau_{A^e}, M)$ jest prawo noetherowska i prawy $\mathbb{A}(\tau_{A^e}, M)$-moduł $\mathbb{A}(\tau_{A^e}, M, S)$ jest noetherowski dla dowolnego prawego A^e-modułu S.*

(3) *Dla każdego skończenie wymiarowego A^e-modułu M, prawy $\mathbb{A}(\tau_{A^e}, M)$-moduł $\mathbb{A}(\tau_{A^e}, M, N)$ jest noetherowski.*