O pewnym zastosowaniu gier Ehrenfeuchta–Fraissé w teorii reprezentacji algebr

na podstawie referatu Stanisława Kasjana

24 października 2002

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym oraz niech $V \subset K$ będzie pierścieniem waluacyjnym ciała K odpowiadającym waluacji v. Oznaczmy przez R ciało reszt pierścienia V, tzn. $V/\mathfrak{m}$, gdzie $\mathfrak{m}$ jest ideałem maksymalnym w V.

Niech A będzie ordynkiem nad V z semi-multiplikatywną bazą, tzn. układem $e_1, \ldots, e_n$, $a_{x,y}$, $(x,y) \in S_1$, takim, że $e_1, \ldots, e_n$ są ortogonalnymi idempotentami, $S_1 = \{(x,y) \in \{1,\ldots,n\}^2 \mid e_xAe_y \neq 0\}$, $a_{xy} \in e_xAe_y$, $A = \bigoplus_{i=1}^n Ve_i \oplus \bigoplus_{(x,y)\in S_1} Va_{x,y}$, oraz $\bigoplus_{x,y\in S_1} Va_{x,y}$ jest ideałem. Mnożenie w A zadane jest przez układ $(c_{x,y,z})_{(x,y,z)\in S_2}$, gdzie $S_2 = \{(x,y,z) \mid (x,y),(y,z),(x,z) \in S_1\}$, przy czym $a_{x,y}a_{y,z} = c_{x,y,z}a_{x,z}$. Łączności mnożenia oznacza, że $c_{x,y,z}c_{x,z,t} = c_{x,y,t}c_{y,z,t}$, $(x,y,z,t) \in S_3$, gdzie $S_3 = \{(x,y,z,t) \mid (x,y,z),(x,z,t),(x,y,t),(x,y,z,t) \in S_2\}$.

Celem jest zbadanie związków pomiędzy R-algebrą $\overline{A} = A/\mathfrak{m}A \simeq A \otimes_V R$ oraz K-algebrą $A^{(K)} = A \otimes_V K$. W tym celu chcemy porównać $\overline{A}$ z pewną K-algebrą, która deformuje się do $A^{(K)}$. Dla przykładu, jeśli Q jest następującym kołczanem

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

oraz $A = VQ/\langle \beta\gamma - m\alpha\rangle$, $m \in \mathfrak{m}$, to $A^{(K)}$ jest algebrą dróg kołczanu $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$, podczas gdy $\overline{A} = RQ/\langle \alpha\beta\rangle$. Wiadomo, że algebra $KQ/\langle \alpha\beta\rangle$ jest degeneracją algebry $A^{(K)}$.

Aby skonstruować odpowiednią degenerację algebry $A^{(K)}$ możemy posłużsię yć metodą uzmienniania stałych $c_{x,y,z}$, tzn. określić $c_{x,y,z}(\lambda)$, $\lambda \in K$, tak, aby $c_{x,y,z}(1) = c_{x,y,z}$ oraz $c_{x,y,z}(0) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_{x,y,z} \in \mathfrak{m}$ (tzn. gdy $v(c_{x,y,z}) > 0$). Najprościej położyć $c_{x,y,z}(\lambda) = \lambda^{w_{x,y,z}} c_{x,y,z}$, gdzie

$w_{x,y,z} \geq 0$ oraz $w_{x,y,z} > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(c_{x,y,z}) > 0$. Łączność działania mnożenia zadanego przez tak zdefiniowane stałe $c_{x,y,z}(\lambda)$ oznacza, że $w_{x,y,z} + w_{x,z,t} = w_{x,y,t} + w_{y,z,t}$. Zauważmy, że $v(c_{x,y,z}) + v(c_{x,z,t}) = v(c_{x,y,t}) + v(c_{y,z,y})$.

Mamy zatem następujący problem ogólny. Niech $a = [a_{i,j}]$ będzie macierzą o współczynnikach całkowitych wymiaru $m \times n$ oraz niech $R_1, \ldots, R_l \in \{\leq, <, >, \geq\}$, $l \leq m$. Pokażemy, że układ $\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $x_j \; R_j \; 0$, $j = 1, \ldots, l$, posiada rozwiązanie w grupie G wtedy i tylko wtedy, gdy posiada rozwiązanie w $\mathbb{Q}$. Ponieważ ciało K jest algebraicznie domknięte, więc grupa G jest podzielna. Jest to zatem konsekwencja następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Niech A i B będą dwoma uporządkowanymi grupami podzielnymi. Wtedy grupy A i B są elementarnie równoważne.*

Zauważmy, że grupa uporządkowana A może być traktowana jako zbiór wyposażony w dwie relacje μ i $\leq$, gdzie $\mu \subseteq A^3$, przy czym $(a_1, a_2, a_3) \in \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 + a_2 = a_3$.

Niech X będzie niepustym zbiorem. Jeśli h' i h'' są dwoma ciągami (skończonymi lub nieskończonymi) o wyrazach w X, to piszemy $h' \leq h''$ wtedy i tylko wtedy, gdy h' jest odcinkiem początkowym ciągu h''. Podzbiór H zbioru wszystkich ciągów o wyrazach w X nazywamy zbiorem historii nad X, o ile spełnione są następujące warunki:

(1) $\varnothing \in H$,

(2) jeśli $h \in H$ oraz $h' \leq h$, to $h' \in H$,

(3) jeśli ciąg h jest nieskończony i dla każdego $h' \leq h$, $h' \in H$, to $h \in H$.

Przez $l(h)$ oznaczać będziemy długość ciągu h. Dla $h \in H$ definiujemy $h^{\rightarrow} = \{x \in X \mid (h, x) \in H\}$.

Grą nazywać będziemy układ (H, P, W), gdzie H jest zbiorem historii nad pewnym zbiorem X, $P : H \setminus \max H \to \{1, 2\}$ oraz $W \subset \max H$. Niech $H_i = P^{-1}(i)$. Strategią gracza i nazwiemy taką funkcję $\sigma_i : H_i \to X$, że $\sigma_i(h) \in h^{\rightarrow}$ dla $h \in H_i$. Zbiór strategii gracza i będziemy oznaczać przez $\Sigma_i(\Gamma)$. Para $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ jednoznacznie wyznacza historię $h = h_{(\sigma_1, \sigma_2)} \in \max H$ taką, że $(h', \sigma_{P(h')}(h')) \leq h$ dla $h' < h$. Powiemy, że σ_1 jest strategią wygrywającą gracza 1, o ile dla każdego $\sigma_2 \in \Sigma_2(\Gamma)$, $h_{(\sigma_1, \sigma_2)} \in W$. Analogicznie definiujemy pojęcie strategii wygrywającej gracza 2.

Twierdzenie (Kuhn)**.** *Jeśli $\sup_{h \in H} l(h) < \infty$, to jeden z graczy posiada strategię wygrywającą.*

Jeśli A i B są dwoma modelami, to relacja $\rho \subseteq A \times B$ jest częściowym izomorfizmem, o ile wyznacza bijekcję $\rho : \mathrm{dom}(\rho) \to \mathrm{im}(\rho)$ zachowującą strukturę modeli.

Niech r będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz niech A i B będą dwoma rozłącznymi modelami. Grą Ehrenfeuchta–Fraissé długości r nazywamy grę $\mathrm{EF}^r(A, B) = (H, P, W)$, gdzie $X = A \cup B$, H jest zbiorem takich ciągów $(x_1, \ldots, x_l)$, że $l \leq 2r$, $x_{2j-1} \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_{2j} \in B$, oraz $P(h) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $l(h) \equiv 0 \pmod 2$. Dla $h \in \max H$ definiujemy ciągi $a(h) = (A \cap \{x_1, x_2\}, \ldots, A \cap \{x_{2r-1}, x_{2r}\})$ oraz $b(h) = (B \cap \{x_1, x_2\}, \ldots, B \cap \{x_{2r-1}, x_{2r}\})$. Niech $\rho(h) = \{(a(h)_j, b(h)_j) \mid j = 1, \ldots, r\}$. Wtedy $h \in W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho(h)$ nie jest częściowym izomorfizmem. Twierdzenie Ehrenfeuchta orzeka, że modele A i B są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy gracz 2 ma strategię wygrywającą w $\mathrm{EF}^r(A, B)$ dla każdego r.

Niech A będzie uporządkowaną grupą podzielną. Zauważmy, że A ma strukturę przestrzeni linowej nad $\mathbb{Q}$ zgodną z porządkami w A i $\mathbb{Q}$. Niech $x_s = 3^{\frac{1}{5}(6^{s-1}-1)}$, $s \geq 1$. Wtedy $x_{s+1} = 3x_s^6$. Definiujemy $\mathscr{I}_L^s = \{(\mu, \nu) \mid \mu, \nu \in \mathbb{Z}^l,\ \nu_i \neq 0,\ |\mu_i|, |\nu_i| \leq x_s\}$. Jeśli $(\mu, \nu) \in \mathscr{I}_l^s$ oraz $a = (a_1, \ldots, a_l) \in A^l$, to $\frac{\mu}{\nu} a = \sum_{i=1}^{l} \frac{\mu_i}{\nu_i} a_i$. Kładziemy $\mathscr{U}^s(a) = \{\frac{\mu}{\nu} a \mid (\mu, \nu) \in \mathscr{I}_l^s\}$.

Niech A i B będą dwoma uporządkowanymi grupami podzielnymi o rozłącznych nośnikach. Można pokazać, że gracz 2 ma w $\mathrm{EF}^r(A, B)$ strategię σ_2 taką, że dla dowolnej strategii σ_1 gracza 1, jeśli $h = h_{(\sigma_1, \sigma_2)}$ oraz $a(h) = (a_1, \ldots, a_r)$, $b(h) = (b_1, \ldots, b_r)$, to dla dowolnego $1 \leq j \leq r$, relacja $\rho_j((a_1, \ldots, a_j), (b_1, \ldots, b_j)) = \{(\frac{\mu}{\nu}(a_1, \ldots, a_j), \frac{\mu}{\nu}(b_1, \ldots, b_j) \mid (\nu, \nu) \in \mathscr{I}_j^{r+1-j}\}$ jest częściowym izomorfizmem. W szczególności strategia σ_2 jest wygrywająca.

Strategię σ_2 konstruuje się następująco. Jeśli $h = (x_1)$, to $\sigma(h)$ jest dowolnym elementem drugiego z modeli, o tym samym znaku. Przypuśćmy teraz, że $l(h) = 2j + 1$, $j > 0$. Niech $(A \cap \{x_1, x_2\}, \ldots, A \cap \{x_{2j-1}, x_{2j}\}) = (a_1, \ldots, a_j)$ oraz $(B \cap \{x_1, x_2\}, \ldots, B \cap \{x_{2j-1}, x_{2j}\}) = (b_1, \ldots, b_j)$, Załóżmy, że $\rho_j((a_1, \ldots, a_j), (b_1, \ldots, b_j))$ jest częściowym izomorfizmem oraz $x_{2j+1} \in A$. Wybieramy $x_{2j+2} \in B$ tak, aby istniała bijekcja pomiędzy zbiorami $\{u \in \mathscr{U}^{r+1-j}((a_1, \ldots, a_j)) \mid u \leq x_{2j+1}\}$ oraz $\{u \in \mathscr{U}^{r+1-j}((b_1, \ldots, b_j)) \mid u \leq x_{2j+2}\}$.