Nakrycia Galois algebr obejmujących samoinjektywnych algebr Nakayamy

na podstawie referatu Zygmunta Pogorzałego

7 listopada 2002

Przez K oznaczać będziemy ustalone ciało algebraicznie domknięte. Rozważane algebry będą skończenie wymiarowymi bazowymi i spójnymi K-algebrami, które nie są trywialne.

Niech A i B będą samoinjektywnymi algebrami. Powiemy, że algebry A i B są stabilnie równoważne typu Mority, jeśli istnieją bimoduły ${}_AN_B$ i ${}_BM_A$ takie, że:

(1) M i N są projektywnymi lewymi i projektywnymi prawymi modułami,

(2) $M \otimes_A N \simeq B \oplus \Pi$ jako B-B-bimoduł dla pewnego projektywnego B-B-bimodułu Π,

(3) $N \otimes_B M \simeq A \oplus \Pi'$ jako A-A-bimoduł dla pewnego projektywnego A-A-bimodułu Π'.

W powyższej sytuacji $- \otimes_A N$ indukuje równoważność kategorii $\underline{\mathrm{mod}}\, A$ i $\underline{\mathrm{mod}}\, B$, której quasi-odwrotność zadana jest przez $- \otimes_B M$. Rickard pokazał, że jeżeli dwie algebry samoinjektywne są pochodnie równoważne, to są też one stabilnie równoważne typu Mority.

Niech A będzie samoinjektywną algebrą Nakayamy. Wtedy $A = KQ/I$, gdzie Q jest cyklem długości t_A, $t_A > 0$, zaś ideał generowany jest przez wszystkie drogi długości l_A, $l_A \geq 2$. Niech $\overline{Q}$ będzie kołczanem, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór $\{0, \ldots, t_A - 1\}^2$, zaś strzałki są postaci $\alpha_{i,j} : (i,j) \to (i+1, j)$ oraz $\beta_{i,j} : (i,j) \to (i, j+1)$. Oznaczmy przez $\overline{I}$ ideał w $\overline{Q}$ generowany przez wszystkie elementy postaci $\alpha_{i,j+l_A-1} \cdots \alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j+l_A-1} \cdots \beta_{i,j}$ oraz $\alpha_{i,j+1}\beta_{i,j} - \beta_{i+1,j}\alpha_{i,j}$. Wtedy $A^e = K\overline{Q}/\overline{I}$.

Stwierdzenie. *Algebra A^e jest standardowa.*

Dowód. Mamy nakrycie uniwersalne $F : \tilde{A}^e \to A$, którego wierzchołkami są punkty $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, strzałki są postaci $\alpha_{i,j} : (i,j) \to (i+1, j)$ i $\beta_{i,j} : (i,j) \to (i, j+1)$, zaś relacje są takie jak wyżej. $\square$

Lemat. *Dla nakrycia Galois $F : \tilde{A}^e \to A$ mamy, że prawy A^e-moduł A nie jest pierwszego rodzaju.*

Dowód. Dla dowodu pokażemy, że żaden skończenie wymiarowy nierozkładalny nieprojektywny A^e-moduł, który jest lewo-prawo projektywny, nie jest pierwszego rodzaju. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje nierozkładalny $\tilde{A}^e$-moduł Y, który nie jest projektywny oraz $F_\lambda(Y)$ jest lewo-prawo projektywny. Niech i_0 będzie minimalną liczbą całkowitą i taką, że $(i, j) \in \operatorname{supp} Y$ dla pewnego j oraz niech j_0 będzie minimalną liczbą całkowitą j taką, że $(i_0, j) \in \operatorname{supp} Y$. Z lewo-prawo projektywności modułu $F_\lambda(Y)$ wynika, że istnieje monomorfizm $P_{\tilde{A}^e}(i_0, j_0) \to Y$, co wobec samoinjektywności algebry $\tilde{A}^e$ kończy dowód. $\square$

Rozważmy kategorię E otrzymany z $\tilde{A}^e$ przez podzielenie przez relację równoważności $\sim$ zadaną przez warunek $(i, j) \sim (i + t_A, j - t_A)$. Wtedy E jest trójkątną lokalnie ograniczoną K-kategorią oraz istnieje nakrycie Galois $F' : E \to A^e$. Ponadto moduł $\overline{A}$ zdefiniowany wzorem $\overline{A}_{i,j} = K$, $0 \le i + j \le l_A - 1$, oraz $\overline{A}_{i,j} = 0$ w pozostałych przypadkach, spełnia warunek $F'_\lambda(\overline{A}) = A$. Z analizy działania translacji τ_E (która jest możliwa dzięki jej związkom z funktorem syzygi oraz funktorem Nakayamy) wynika, że τ_{A^e}-okres modułu A wynosi 1, gdy $l_A = 2$, oraz $\frac{\operatorname{lcm}(l_A-2, t_A)}{l_A-2}$, jeśli $l_A > 2$.