Nakrycia Galois algebr samoinjektywnych przez algebry powtórzeń

na podstawie referatu Andrzeja Skowrońskiego

16 stycznia 2003

Omawiane wyniki są wspólnymi wynikami z Kunio Yamagatą.

Przez K oznaczać będziemy przemienny pierścień artinowski. Wszystkie rozważane algebry będą spójnymi bazowymi algebrami artinowskimi nad K. Dla algebry A przez $\operatorname{mod} A$ oznaczać będziemy kategorię skończenie generowanych prawych A-modułów. Niech $D = \operatorname{Hom}_K(-, E) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ będzie standardową dualnością, gdzie E jest minimalnym injektywnym kogeneratorem w $\operatorname{mod} A$.

Dla zbioru $X \subseteq A$ przez $l_A(X)$ oznaczać będziemy lewy anihilator zbioru X w A, który jest zbiorem wszystkich $a \in A$ takich, że $aX = 0$. Lewy anihilator zbioru X jest lewym ideałem algebry A. Analogicznie definiujemy prawy anihilator $r_A(X)$ zbioru X. Przez Q_A oznaczać będziemy (wartościowany) kołczan Gabriela algebry A. Przypomnijmy, że jeśli $1 = e_1 + \cdots + e_s$, gdzie $e_1, \ldots, e_s$ są parami ortogonalnymi prymitywnymi idempotentami, to zbiorem wierzchołków kołczanu Q_A jest zbiór $\{1, \ldots, s\}$. Ponadto mamy strzałkę $i \to j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e_i(\operatorname{rad} A)e_j / e_i(\operatorname{rad}^2 A)e_j \neq 0$.

Przypomnijmy, że algebra A jest samoinjektywna, jeśli prawe (równoważnie lewe) A-moduły A i $D(A)$ są izomorficzne. Algebra A jest symetryczna, jeśli A-A-bimoduły A i $D(A)$ są izomorficzne. Jeśli B jest algebrą, to trywialne rozszerzenie $T(B) = B \ltimes D(B)$ algebry B jest algebrą symetryczną.

Nakayama udowodnił, że algebra A jest samoinjektywna wtedy i tylko wtedy, gdy $l_A r_A(I) = I$ dla dowolnego lewego ideału I algebry A oraz $r_A l_A(J) = J$ dla dowolnego prawego ideału J algebry A.

Jeśli algebra A jest samoinjektywna, to $\operatorname{soc}{}_A A = \operatorname{soc} A_A$, a więc jest ideałem w A oznaczanym $\operatorname{soc} A$. Algebry samoinjektywne A' i A'' nazywamy cokołowo równoważnymi, o ile $A'/\operatorname{soc} A' \simeq A''/\operatorname{soc} A''$. Jeżeli P jest nierozkładalnym modułem projektywnym nad algebrą samoinjektywną, to mamy ciąg Auslandera–Reiten

$$0 \to \operatorname{rad} P \to \operatorname{rad} P/\operatorname{soc} P \oplus P \to P/\operatorname{soc} P \to 0.$$

Zatem, gdy algebry samoinjektywne A' i A'' są cokołowo równoważne, to ich kołczany Auslandera–Reitena są izomorficzne.

Zauważmy, że jeżeli A jest nietrywialną algebrą samoinjektywną, to mamy $\operatorname{gldim} A = \infty$ oraz kołczan Q_A nie ma wierzchołków początkowych oraz końcowych. To implikuje poważne trudności w badaniu kategorii $\operatorname{mod} A$. Z drugiej strony wiadomo, że dowolna samoinjektywna algebra skończonego typu nad ciałem algebraicznie domkniętym jest cokołowo równoważna z algebra postaci $\hat{B}/G$, gdzie $\hat{B}$ jest algebra powtórzeń algebry odwróconej B typu Dynkina, a G jest nieskończoną grupą cykliczną automorfizmów $\hat{B}$.

W poniższych rozważaniach interesował nas będzie następujący problem. Niech A będzie spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską nad K. Kiedy istnieje nakrycie Galois $\hat{B} \to \hat{B}/G$, gdzie $B = A/I$ dla ideału I w A oraz dopuszczalnej grupy automorfizmów G. Interesował nas będzie przypadek, gdy $G = (\varphi\nu_{\hat{B}})$ dla dodatniego automorfizmu φ algebry $\hat{B}$.

Ohnuki, Takeda i Yamagata udowodnili, że jeśli B jest bazową spójną algebrą artinowską oraz φ jest dodatnim automorfizmem algebry $\hat{B}$, to algebra $A = \hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}})$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $A \simeq T(B)$.

Niech A to będzie spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską. Niech $I \neq A$ będzie ideałem oraz $B = A/I$. Istnieje układ prymitywnych idempotentów algebry A, $e_1, \ldots, e_t, e_{t+1}, \ldots, e_s$ taki, że $1 = e_1 + \cdots + e_s$, $e_1, \ldots, e_t \notin I$ oraz $e_{t+1}, \ldots, e_s \in I$. W powyższej sytuacji element $e + I$, gdzie $e = e_1 + \cdots + e_t$, jest jedynką w B. Wtedy e nazywamy residualną jedynką algebry B. Oczywiście $1 - e \in I$. Zauważmy, że dla $A = T(B)$ oraz $I = D(B)$, mamy $e = 1$.

Jeśli $l_A(I) = Ie$ dla pewnego ideału I oraz idempotentu e, to e jest residualną jedynką algebry A/I. Istotnie, niech e' będzie idempotentnym składnikiem e, tzn. $ee' = e' = e'e$, oraz $e' \in I$. Wtedy $e' \in IeI$. Warunek $l_A(A) = Ie$ implikuje, że $IeI = 0$, więc $e' = 0$. Ponadto $1 - e \in r_A(Ie) = r_A l_A(I) = I$, co kończy dowód.

Niech A będzie spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską, niech I będzie ideałem w A oraz niech e będzie residualną jedynką algebry $B = A/I$. Załóżmy ponadto, że $IeI = 0$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

(1) Ie jest injektywnym kogeneratorem $\operatorname{mod} B$;

(2) eI jest injektywnym kogeneratorem w $\operatorname{mod} B^{\mathrm{op}}$.

(3) $l_A(I) = Ie$;

(4) $r_A(I) = eI$.

Ponadto, jeżeli spełniony jest jeden z powyższych warunków, to $\operatorname{soc} A \subset I$ oraz $l_{eAe}(I) = eIe = r_{eAe}(I)$.

Twierdzenie. *Niech A będzie spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską. Istnieje nakrycie Galois $\hat{B} \to \hat{B}/G = A$, gdzie B jest pewną bazową algebrą artinowską, a G nieskończoną grupą cykliczną $(\varphi\nu_{\hat{B}})$ dla pewnego dodatniego automorfizmu φ algebry $\hat{B}$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ideał I oraz idempotent e algebry A takie, że spełnione są warunki:*

(1) *$l_A(I) = Ie$;*

(2) *kanoniczny epimorfizm algebr $eAe \to eAe/eIe$ jest rozszczepialny.*

Ponadto, jeśli spełnione są powyższe warunki, to istnieje nakrycie Galois $\hat{C} \to A$, gdzie $C = A/I$.

Dowód. Niech $F : \hat{B} \to \hat{B}/G = A$ będzie stosownym nakryciem. Niech J będzie ideałem w A generowanym przez $F\mathscr{E}/F\mathscr{E}_0$, niech L będzie ideałem w A generowany przez Ff, $f \in (DB)_0$. Jeśli $I = J + L$, $e = Fe_{0,1} + \cdots + Fe_{0,k}$, to I i e spełniają warunki oraz $A/I \simeq eAe/eIe = B$.

Załóżmy teraz, że I jest ideałem w A spełniającym powyższe warunki. Niech $B = A/I$. Istnieje pełny układ idempotentów $e_1, \ldots, e_k$ algebry A taki, że $1 = e_1 + \cdots + e_k$, $e = e_1 + \ldots + e_m$, $e_1, \ldots, e_m \notin I$, $e_{m+1}, \ldots, e_k \in I$. Niech $\nu_A : A \to A$ będzie automorfizmem Nakayamy takim, że $\operatorname{soc}(e_iA) = \operatorname{top}(\nu(e_i)A)$. Mamy wtedy permutację Nakayamy ν zbioru $\{1, \ldots, k\}$ taką, że $\nu(e_i)A = e_{\nu(i)}A$. Dla $i = 1, \ldots, m$ określamy

$$\xi i = \min\{l \geq 1 \mid \nu^{-l}(i) \leq m\}.$$

Niech $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ będzie określone przez

$$g(e_{n,i}) = e_{n+\xi(i),\nu^{-\xi(i)}(i)}.$$

Wtedy g jest bijekcją zbioru $\mathscr{E}$, którą można rozszerzyć do automorfizmu kategorii $\hat{B}$ postaci $\varphi\nu_{\hat{B}}$, gdzie φ jest dodatnim automorfizmem określonym wzorem

$$\varphi(e_{n,i}) = e_{n+\xi(i)-1,\nu^{-\xi(i)}i}$$

Ponadto $\hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}}) \simeq A$. $\square$

Twierdzenie. *Niech A będzie spójną bazową algebrą artinowską. Załóżmy, że istnieją nakrycia Galois $F : \hat{B} \to \hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}}) = A$ i $H : \hat{C} \to /(\psi\nu_{\hat{C}}) = A$, gdzie B i C są spójnymi bazowymi algebrami artinowskimi takimi, że kołczany Gabriela Q_B i Q_C nie mają zorientowanych cykli, oraz φ i ψ są dodatnimi automorfizmami. Wtedy istnieje izomorfizm $\Phi : \hat{B} \to \hat{C}$ taki, że $F = H\Phi$.*

Wniosek. *Niech A będzie spójną bazową skończenie wymiarową algebrą samoinjektywną nad ciałem algebraicznie domkniętym K. Istnieje nakrycie Galois $F : \hat{B} \to \hat{B}/G$, gdzie B jest skończenie wymiarową trójkątna K-algebrą nad K oraz $G = (\varphi\nu_{\hat{B}})$, gdzie φ jest dodatnim automorfizmem $\hat{B}$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ideał I oraz idempotent $e \in A$ takie, że*

(1) $l_A(I) = Ie$,

(2) *kołczan $Q_{A/I}$ nie ma zorientowanych cykli.*

Wiadomo, że jeśli powyższe warunki są spełnione, to $H^2(eAe/eIe, eAe) = 0$, więc każdy epimorfizm $eAe \to eAe/eIe$ jest rozszczepialny.

Wniosek. *Niech A będzie spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską. Istnieje nakrycie Galois $F : \hat{B} \to \hat{B}/G = A$, gdzie B jest spójną trójkątną bazową algebrą artinowską oraz $G = (\varphi\nu_{\hat{B}})$, gdzie φ jest ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\hat{B}$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ideał I oraz idempotent $e \in A$ takie, że*

(1) $l_A(I) = Ie$,

(2) $e_iA \neq \nu_A(e_i)A$ *dla dowolnego prymitywnego składnika e_i idempotentu e,*

(3) $Q_{A/I}$ *nie ma zorientowanych cykli oraz ma mniej wierzchołków niż Q_A.*

Niech A będzie spójną bazową spójną samoinjektywną algebrą artinowską nad przemiennym pierścieniem artinowskim K. Niech I będzie ideałem w A, $I \neq A$, $B = A/I$, oraz niech e będzie residualną jedynką algebry $B = A/I$. Ideał I nazywamy deformującym o ile w kołczanie Q_B nie ma zorientowanych cykli oraz $l_{eAe}(I) = eIe = r_{eAe}(I)$. Wiadomo, że jeżeli $l_A(I) = Ie$ oraz w kołczanie Q_B nie ma zorientowanych cykli, to ideał I jest deformujący.

Niech I będzie ideałem deformującym. Definiujemy algebrę $A[I]$ następująco. Ponieważ $eIeI = 0 = IeIe$, więc I można rozważać jako eAe/eIe-bimoduł. Wtedy $A[I] = (eAe/eIe) \oplus I$ jako K-moduł oraz

$$(b, x)(b', x') = (bb', bx' + xb' + xx')$$

dla $b, b' \in eAe/eIe$, $x, x' \in I$.

Stwierdzenie. *Jeśli $A[I]$ jest spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską nad K, to $I = \{(0, x) \mid x \in I\}$ jest ideałem w $A[I]$, $e = e + eIe$ jest residualną jedynką dla $A[I]/I \simeq B$, $l_{A[I]}(I) = Ie$, $r_{A[I]}(I) = eI$ oraz kanoniczny epimorfizm $eA[I]e \to eA[I]e/eIe$ jest rozszczepialny.*

Twierdzenie. *Niech I będzie deformującym ideałem samoinjektywnej algebry artinowskiej A oraz e residualną jedynką algebry $A[I]$.*

(1) *Algebry A oraz $A[I]$ są cokołowo równoważne.*

(2) *Algebry A oraz $A[I]$ są stabilnie równoważne.*

(3) *Jeżeli A jest algebrą symetryczną, to $A[I]$ jest również algebrą symetryczną.*

Niech B będzie algebrą odwróconą typu Δ. Jeśli G jest dopuszczalną grupą automorfizmów kategorii $\hat{B}$, to G jest nieskończoną grupą cykliczną generowaną przez pewien ściśle dodatni automorfizm. Wtedy $A = \hat{B}/G$ jest algebrą samoinjektywną, którą nazywamy algebrą samoinjektywną typu odwróconego Δ. Funktor $F_\lambda : \operatorname{mod} \hat{B} \to \operatorname{mod} A$ stowarzyszony z nakryciem Galois $F : \hat{B} \to \hat{B}/G$ jest gęsty. Stąd $\Gamma_A = \Gamma_{\hat{B}}/G$.

Podkołczan $\Sigma \subset \Gamma_A$ nazywamy uogólnionym standardowym, o ile mamy $\operatorname{rad}^\infty(X, Y) = 0$ dla dowolnych $X, Y \in \Sigma$. Załóżmy, że kołczan Δ nie jest kołczanem typu Dynkina. Jeśli $A = \hat{B}/G$, gdzie B jest algebrą odwróconą typu Δ, to kołczan Γ_A^s posiada co najmniej jedną składową $\mathbb{Z}\Delta$. Niech $\mathscr{C}$ będzie składową w Γ_A taką, że $\mathscr{C}^s = \mathbb{Z}\Delta$. Mamy wtedy pełne podkołczany $\mathscr{C}^- = \mathbb{N}\Delta$ oraz $\mathscr{C}^+ = (-\mathbb{N})\Delta$.

Stwierdzenie. *Niech $A = \hat{B}/G$ będzie algebrą samoinjektywną typu odwróconego Δ, gdzie Δ jest typu Dynkina. Wtedy $G = (\varphi\nu_{\hat{B}})$ dla pewnego dodatniego automorfizmu φ kategorii $\hat{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej składowej $\mathscr{C}$ w Γ_A typu Δ kołczany $\mathscr{C}^-$ i $\mathscr{C}^+$ są uogólnione standardowe.*

Wiadomo, że kołczan Auslandera–Reiten dowolnej algebry artinowskiej skończonego typu reprezentacyjnego jest uogólniony standardowy.

Twierdzenie. *Niech A będzie spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską nad przemiennym pierścieniem artinowskim K. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Kołczan Γ_A posiada nieperiodyczny uogólniony standardowy lewostabilny pełny podkołczan z translacją zamknięty na branie poprzedników.*

(2) *Kołczan Γ_A posiada nieperiodyczny uogólniony standardowy prawostabilny pełny podkołczan z translacją zamknięty na branie następników.*

(3) *Algebra A jest cokołowo równoważna z algebrą $\hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}})$, gdzie B jest algebrą odwróconą typu Δ, a φ jest dodatnim automorfizmem algebry $\hat{B}$.*

Ponadto, jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to w ostatnim warunku możemy zastąpić cokołową równoważność na izomorfizm.

Dowód. Załóżmy, że kołczan Γ_A posiada nieperiodyczny uogólniony standardowy prawostabilny pełny podkołczan z translacją Σ zamknięty na branie następników. Wtedy Γ_A zawiera pełny pokołczan postaci $\mathbb{N}\Delta$, przy czym Δ musi być skończony, gdyż Σ jest uogólniony standardowy Niech M będzie sumą prostą A-modułów nierozkładalnych leżących na Δ. Niech $I = r_A(M)$, $B = A/I$ oraz niech e będzie residualną jedynką w A/I.

Wtedy M jest odwracającym i koodwracającym B-modułem, algebra $H = \mathrm{End}_B(M)$ jest dziedziczna typu Δ, $T = D(M)$ jest H-modułem odwracającym oraz $B = \mathrm{End}_H(T)$ jest algebrą odwróconą typu Δ.

Można pokazać, że $l_A(I) = Ie$. Ponieważ algebra B jest odwrócona, więc jest trójkątna, a więc I jest ideałem deformującym. Na ogół kanoniczny epimorfizm $eAe \to eAe/eIe$ nie jest jednak rozszczepialny. Rozważmy algebrę $A[I]$ cokołowo równoważną z A. Dla algebry $A[I]$ spełnione są odpowiednie warunki, zatem $A[I] = \hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}})$ dla pewnego dodatniego automorfizmu φ algebry $\hat{B}$, co kończy dowód. Jeśli K jest ciałem algebraicznie domknięte, to nie ma potrzeby rozważania $A[I]$, gdyż epimorfizm $eAe \to eAe/eIe$ jest rozszczepialny. □

Twierdzenie. *Niech A będzie spójna bazową algebrą artinowską. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Γ_A posiada co najmniej 3 uogólnione standardowe składowe.*

(2) *$A \simeq \hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}})$, gdzie B jest algebrą odwróconą typu nie Dynkina oraz φ jest ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\hat{B}$.*

Algebrę artinowską A nazywamy ściśle dziką, o ile istnieją moduły $X, Y \in \mathrm{mod}\, A$ takie, że $\mathrm{End}_A(X)$ i $\mathrm{End}_A(Y)$ są pierścieniami z dzieleniem, mamy równości $\mathrm{Hom}_A(X,Y) = 0 = \mathrm{Hom}_A(Y,X)$ oraz nierówność

$$\dim_{\mathrm{End}_A(Y)} \mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \dim_{\mathrm{End}_A(X)} \mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \geq 5.$$

Algebrę A nad ciałem K nazywamy dziką, jeśli istnieje rozszerzenie K' ciała K oraz $K'\langle x,y\rangle$-A-bimoduł M, który jest skończenie generowany jako lewy $K'\langle x,y\rangle$-moduł oraz taki, że funktor $- \otimes M : \mathrm{Mod}\, K'\langle x,y\rangle \to \mathrm{Mod}\, A$ zachowuje moduły nierozkładalne oraz klasy izomorfizmów.

Twierdzenie. *Niech A będzie spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską (skończenie wymiarową nad ciałem). Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Algebra A nie jest ściśle dzika oraz Γ_A posiada nieperiodyczną uogólnioną standardową składową.*

(2) *Algebra A nie jest dzika oraz Γ_A posiada nieperiodyczną uogólnioną standardową składową.*

(3) *Kołczan Γ_A posiada nieperiodyczną uogólnioną standardową składową oraz wszystkie składowe w Γ_A są uogólnione standardowe.*

(4) *Kołczan Γ_A posiada uogólnioną standardową składową typu Euklidesa.*

(5) *$A \simeq \hat{B}/(\varphi_{\hat{B}})$, gdzie B jest algebrą odwróconą typu Euklidesa oraz φ jest ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\hat{B}$.*

Niech Δ będzie wartościowanym kołczanem Dynkina. Niech h będzie rzędem elementu Coxetera w grupie Weyla $W(\Delta)$. Wiadomo, że $h = 2N/|\Delta_0|$, gdzie N jest liczbą pierwiastków dodatnich.

Można sformułować następującą hipotezę. Niech A będzie bazową spójną samoinjektywną algebrą artinowską skończonego typu oraz niech Δ będzie kołczanem Dynkina stowarzyszonym z Γ_A (wiadomo, że $\Gamma_A^s = \mathbb{Z}\Delta/G$). Jeżeli liczba klas izomorfizmów nierozkładalnych A-modułów jest $\geq h_\Delta|\Delta_0|$ (odpowiednio $> h_\Delta|\Delta_0|$), to A jest cokołowo równoważna (odpowiednio izomorficzna) z algebrą $\hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}})$, gdzie B jest algebrą odwróconą typu Δ oraz φ jest dodatnim (odpowiednio ściśle dodatnim) automorfizmem $\hat{B}$.

Twierdzenie. *Niech A będzie spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską nad przemiennym pierścieniem artinowskim K, a Δ spójnym skończonym kołczanem wartościowanym bez zorientowanych cykli. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Algebra A jest stabilnie równoważna z algebrą $\hat{R}/(\psi\nu_{\hat{R}})$, gdzie R jest algebrą odwróconą typu Δ, a ψ dodatnim automorfizmem algebry $\hat{R}$.*

(2) *Algebra A jest cokołowo równoważna z algebrą $\hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}})$, gdzie B jest algebrą odwróconą typu Δ, a φ dodatnim automorfizmem algebry $\hat{B}$.*

Ponadto, jeżeli K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to w warunku (2) *możemy zastąpić cokołową równoważność przez izomorfizm.*

Twierdzenie. *Niech A będzie bazową spójną symetryczną algebrą artinowską nad przemiennym pierścieniem artinowskim K, a Δ spójnym skończonym kołczanem wartościowanym bez zorientowanych cykli. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Algebra A jest stabilnie równoważna z trywialnym rozszerzeniem $T(H)$ algebry dziedzicznej typu Δ.*

(2) *Algebra A jest stabilnie równoważna z trywialnym rozszerzeniem $T(R)$ algebry odwróconej typu Δ.*

(3) *Algebra A jest cokołowo równoważna z trywialnym rozszerzeniem $T(B)$ algebry odwróconej typu Δ.*

Ponadto, jeżeli K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to w (3) możemy zastąpić cokołową równoważność przez izomorfizm.

Twierdzenie. *Niech A będzie bazową spójną samoinjektywną algebrą artinowską nad przemiennym pierścieniem artinowskim K, a Δ spójnym skończonym kołczanem wartościowanym bez zorientowanych cykli. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Algebra A jest stabilnie równoważna z algebrą $\hat{R}/(\psi\nu_{\hat{R}})$, gdzie R jest algebrą odwróconą typu Δ, a ψ ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\hat{R}$.*

(2) *Algebra A jest izomorficzna z algebrą $\hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}})$, gdzie B jest algebrą odwróconą typu Δ, a φ ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\hat{B}$.*

Wniosek. *Jeżeli A jest spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską cokołowo równoważną z algebrą $\hat{R}/(\psi\nu_{\hat{R}})$, gdzie R jest algebrą odwróconą typu Δ oraz ψ kest ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\hat{R}$, to A jest izomorficzna z algebrą $\hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}})$, gdzie B jest algebrą odwróconą typu Δ, zaś φ jest ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\hat{B}$.*

Twierdzenie (Kerner–Skowroński–Yamagata). *Niech A będzie spójną bazową samoinjektywną algebrą artinowską. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Algebra A jest stabilnie równoważna z algebrą $\hat{R}/(\varphi\nu_{\hat{R}})$, gdzie R jest algebrą quasi-odwróconą typu kanonicznego, a ψ ściśle dodatnim automorfizmem $\hat{R}$.*

(2) *Algebra A jest izomorficzna z algebrą $\hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}})$, gdzie B jest algebrą quasi-odwróconą typu kanonicznego, a φ ściśle dodatnim automorfizmem $\hat{B}$.*

Wniosek. *Klasa samoinjektywnych algebr artinowskich postaci $\hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}})$, gdzie B jest algebrą quasi-odwrócona, a φ ściśle dodatnim automorfizmem kategorii $\hat{B}$, jest zamknięta ze względu na stabilne równoważności.*

Niech Λ będzie dowolną spójną bazową skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym. Istnieje wówczas skończenie wymiarowa algebra symetryczna $A = T(B)$ taka, że Λ jest ilorazem A oraz Γ_A posiada nieskończoną rodzinę wiernych (uogólnionych) standardowych stabilnych rur. Algebra B jest uogólnioną algebrą kanoniczną, która może być dowolnego globalnego wymiaru.