Algebry i wielomiany Halla

na podstawie referatu Justyny Kosakowskiej

4 grudnia 2003

Referat został opracowany w oparciu o książkę I. G. MacDonalda „Symmetric functions and Hall polynomials” oraz artykuł C. M. Ringela „Hall algebras”.

1 Algebry i wielomiany Halla dla pierścieni

Niech R będzie dziedziną ideałów głównych z 1, która posiada dokładnie jeden różny od 0 ideał pierwszy P. Niech $K = R/P$. Będziemy zakładać, że K jest ciałem skończonym. Typowym przykładem jest $R = \hat{\mathbb{Z}}_p$.

Jeśli M jest modułem skończonym, to $M = \bigoplus_{i=1}^r R/P^{\lambda_i}$, gdzie $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$. Mamy zatem bijekcję pomiędzy zbiorem klas izomorfizmu skończonych R-modułów oraz zbiorem podziałów liczb naturalnych. Podział odpowiadający modułowi M nazywamy typem modułu M. Zauważmy, że $|\lambda| = \sum_{i=1}^r \lambda_i$ jest długością $l(M)$ modułu M. Przypomnijmy, że l jest funkcją addytywną. Gdy N jest podmodułem modułu M, to kotypem modułu N w M nazywamy typ modułu M/N.

Niech λ, $\mu^{(1)}$, ..., $\mu^{(r)}$ będą podziałami oraz niech M będzie modułem skończonej długości typu λ. Definiujemy $G^\lambda_{\mu^{(1)},\ldots,\mu^{(r)}}(R)$ jako ilość ciągów

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_t = 0$$

takich, że typem modułu M_{i-1}/M_i jest $\mu^{(i)}$. W szczególności $G^\lambda_{\mu,\nu}(R)$ jest liczbą podmodułów typu ν i kotypu μ.

Z addytywności funkcji długości wynika następująca prosta obserwacja.

Fakt 1.1. *Jeśli* $|\lambda| \neq |\mu| + |\nu|$, *to* $G^\lambda_{\mu,\nu}(R) = 0$.

Niech $H = H(R)$ będzie wolnym $\mathbb{Z}$-modułem z bazą U_λ, gdzie λ przebiega zbiór wszystkich podziałów. W H wprowadzamy mnożenie wzorem

$$U_\mu U_\nu = \sum_\lambda G^\lambda_{\mu,\nu}(R) U_\lambda.$$

Lemat 1.2. *$H(R)$ jest (łącznym) przemiennym pierścieniem z 1.*

Pierścień $H(R)$ nazywamy pierścieniem Halla. Dla dowodu przemienności trzeba rozważyć $E = \varinjlim R/P^n$ i dualność $\hat{-} = \mathrm{Hom}_R(-, E)$. Przemienność jest konsekwencją izomorfizmu $M \simeq \hat{M}$.

Twierdzenie 1.3. *Dla dowolnych trzech podziałów μ, ν, λ istnieje wielomian $g^\lambda_{\mu,\nu} \in \mathbb{Z}[T]$ taki, że*

$$G^\lambda_{\mu,\nu}(R) = g^\lambda_{\mu,\nu}(|R/P|).$$

Wielomiany $g^\lambda_{\mu,\nu}$ nazywamy wielomianami Halla.

Niech R będzie dowolnym pierścieniem łącznym z 1. Oznaczmy przez $\mathrm{fin}\, R$ kategorię skończonych R-modułów.

Niech S będzie skończonym prostym R-modułem. Dla $M \in \mathrm{fin}\, R$ przez $(\mathbf{dim}\, M)_S$ będziemy oznaczać ilość faktorów izomorficznych z S w ciągu kompozycyjnym modułu M. Mamy zatem funkcję $\mathbf{dim}\, M$ ze zbioru klas izomorfizmu modułów prostych do $\mathbb{Z}$.

Dla modułów skończonych $N_1, \ldots, N_t$, M przez $F^M_{N_1,\ldots,N_t}$ oznaczać będziemy ilość filtracji

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_t = 0$$

takich, że $M_{i-1}/M_i \simeq N_i$, $i = 1, \ldots, t$. Niech $H(R)$ będzie wolną grupą abelową z bazą (U_M) indeksowaną klasami izomorfizmu skończonych R-modułów. W $H(R)$ wprowadzamy mnożenie wzorem

$$U_{N_1} U_{N_2} = \sum_{[M]} F^M_{N_1 N_2} U_M.$$

Twierdzenie 1.4. *$H(R)$ jest łącznym pierścieniem z 1.*

Pierścień $H(R)$ nie musi być przemienny. Dla przykładu rozważmy $R = \left[\begin{smallmatrix} K & K \\ 0 & K \end{smallmatrix}\right]$, gdzie K jest ciałem skończonym. Wtedy $U_{S_1} U_{S_2} = U_{S_1 \oplus S_2} + U_{P_1}$, zaś $U_{S_1} U_{S_2} = U_{S_1 \oplus S_2}$.

2 Algebry i wielomiany Halla dla skończenie wymiarowych algebr nad ciałem

Niech K będzie ciałem skończonym. Wszystkie rozważane algebry będą skończenie wymiarowymi bazowymi K-algebrami. Dla algebry R przez Γ_R oznaczać będziemy kołczan Auslandera–Reiten algebry R. Dla wierzchołka x kołczanu Γ_R przez $M(x) = M(R, x)$ będziemy oznaczać odpowiadający mu R-moduł. Dla danej funkcji $a : (\Gamma_R)_0 \to \mathbb{N}$ przez $M(a) = M(R, a)$ oznaczamy $\bigoplus_{x \in (\Gamma_R)_0} a(x) M(x)$.

Przypomnijmy, że Γ_R jest kołczanem z waluacją (d'_R, d''_R), gdzie $d'_R(x, y)$ jest długością $\operatorname{rad}(M(x), M(y))/\operatorname{rad}^2(M(x), M(y))$ jako $\operatorname{End}(M(y))$-modułu, zaś $d''_R(x, y)$ jest długością tego samego modułu jako $\operatorname{End}(M(x))$-modułu. Mamy funkcję $e : (\Gamma_R)_0 \to \mathbb{N}$ daną wzorem $e_R(x) = \dim_K \operatorname{End} M(x)$. Jeśli R jest algebrą reprezentacyjnie skierowaną, to $e_R(x)d''_R(x, y) = d'_R(x, y)e_R(y)$. Niech r_R będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb $e_R(x)$, $x \in (\Gamma_R)_0$. Liczbę r_R nazywamy indeksem symetryzacji.

Dla ustalonego kołczanu Γ przez $\mathscr{B}$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich funkcji $a : \Gamma_0 \to \mathbb{N}$. Naszym celem jest udowodnienie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.1. *Niech Γ będzie skierowanym kołczanem Auslandera–Reiten oraz niech $a, b, c \in \mathscr{B}$. Istnieje wielomian $\varphi^c_{a,b} \in \mathbb{Z}[T]$ taki, że*

$$F^{M(R,b)}_{M(R,c),M(R,a)} = \varphi^b_{c,a}(|K|^{r_R})$$

dla dowolnego ciała skończonego K oraz dowolnej K-algebry R takiej, że $\Gamma = \Gamma_R$.

W dalszym ciągu Γ będzie ustalonym skierowanym kołczanem Auslandera–Reiten.

Lemat 2.2. *Istnieje funkcja $h : \Gamma_0 \times \Gamma_0 \to \mathbb{N}$ taka, że*

$$\dim_K \operatorname{Hom}(M(R, x), M(R, z)) = r_R h_\Gamma(x, z)$$

dla dowolnych $x, y \in \Gamma_0$ oraz dowolnej K-algebry R takiej, że $\Gamma_R = \Gamma$.

Wniosek 2.3. *Istnieje funkcja $h : \mathscr{B} \times \mathscr{B} \to \mathbb{N}$ taka, że*

$$\dim \operatorname{Hom}(M(R, a), M(R, b)) = r_R h_\Gamma(a, b)$$

dla dowolnych $a, b \in \mathscr{B}$ oraz dowolnej K-algebry R takiej, że $\Gamma_R = \Gamma$.

Dla $a, b \in \mathscr{B}$ definiujemy wielomian $\gamma_{a,b}$ wzorem $\gamma_{a,b} = T^{h(a,b)} \in \mathbb{Z}[T]$.

Wniosek 2.4. $|\operatorname{Hom}(M(R, a), M(R, b)| = \gamma_{a,b}(|K|^{r_R})$ *dla dowolnych $a, b \in \mathscr{B}$ oraz dowolnej K-algebry R takiej, że $\Gamma_R = \Gamma$.*

Niech $\mathscr{P}$ będzie zbiorem wierzchołków projektywnych w Γ. Zauważmy, że istnieje naturalna bijekcja pomiędzy zbiorem $\mathscr{P}$ oraz zbiorem klas izomorfizmu prostych R-modułów dana wzorem $p \mapsto \operatorname{top} M(R, p)$. Zatem możemy traktować $\mathbf{dim}\, M$ jako element zbioru $\mathbb{Z}^{\mathscr{P}}$.

Wniosek 2.5. *Jeśli R_1 i R_2 są dwiema K-algebrami takimi, że $\Gamma_{R_1} = \Gamma = \Gamma_{R_2}$, to*

$$\mathbf{dim}\, M(R_1, a) = \mathbf{dim}\, M(R_2, a)$$

dla dowolnego $a \in \mathscr{B}$.

Dowód. Jest to konsekwencja równości

$$\mathbf{dim}\, M(a)_p = \frac{\dim_K \operatorname{Hom}(M(p), M(a))}{\dim_K \operatorname{End} M(p)} = \frac{h_\Gamma(p, a)}{h_\Gamma(p, p)}.$$

□

Dla $x \in \Gamma_0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ definiujemy wielomian unormowany $\alpha_{nx} \in \mathbb{Z}[T]$ wzorem $\alpha_{nx} = \prod_{i=1}^{n}(\gamma_{x,x}^{n} - \gamma_{x,x}^{i-1})$. Dla $a \in \mathscr{B}$ definiujemy $\alpha_a = \prod_{x \in \Gamma_0} \alpha_{a(x)x} \cdot \prod_{x \neq y} \gamma_{x,y}^{a(x)a(y)}$.

Lemat 2.6. *Dla dowolnego $a \in \mathscr{B}$ oraz dowolnej K-algebry R takiej, że $\Gamma_R = \Gamma$ mamy $|\operatorname{Aut}_R M(R, a)| = \alpha_a(|K|^r)$.*

3 Problem istnienia wielomianów Halla

Lemat 3.1. *Jeśli $\psi, \varphi \in \mathbb{Z}[T]$ oraz wielomian ψ jest unormowany, to ψ dzieli φ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi(q) | \varphi(q)$ dla nieskończenie wielu $q \in \mathbb{Z}$.*

Na zbiorze $\mathbb{Z}^{\mathscr{P}}$ wprowadzamy częściowy porządek wzorem $(a_i) \leq (b_i)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \leq b_i$ dla każdego i. Dla danej funkcji $a \in \mathscr{B}$ definiujemy $\mathscr{S}(a) = \{c \in \mathscr{B} \mid \mathbf{dim}\, M(c) < \mathbf{dim}\, M(a)\}$.

Fakt 3.2. *Dla dowolnych $a, b \in \mathscr{B}$ istnieją wielomiany $\sigma_a^b, \eta_a^b \in \mathbb{Z}[T]$ takie, że*

$$\begin{aligned} \sigma_a^b(|K|^{r_R}) &= |\{N \subseteq M(R, b) \mid N \simeq M(R, a)\}|, \\ \eta_a^b(|K|^{r_R}) &= |\{U \subseteq M(b) \mid M(b)/U \simeq M(a)\}|. \end{aligned}$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $\mathbf{dim}\, M(a) \not\leq \mathbf{dim}\, M(b)$, to możemy przyjąć $\sigma_a^b = 0 = \eta_a^b$. Załóżmy zatem, że $\mathbf{dim}\, M(a) \leq \mathbf{dim}\, M(b)$. Definiujemy wielomiany

$$\begin{aligned} \mu_a^b &= \gamma_{a,b} - \sum_{c \in \mathscr{S}(a)} \eta_c^a \alpha_c \sigma_c^b, \\ \varepsilon_a^b &= \gamma_{a,b} - \sum_{c \in \mathscr{S}(a)} \eta_c^b \alpha_c \sigma_c^a. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla dowolnego $c \in \mathscr{S}(a)$ liczba $\eta_c^a \alpha_c \sigma_c^b(|K|^r)$ jest równa ilości homomorfizmów $f : M(a) \to M(b)$ takich, że $\operatorname{Im} f \simeq M(c)$. Ponieważ homomorfizm $M(a) \to M(b)$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jego obraz nie jest izomorficzny z $M(c)$ dla $c \in \mathscr{S}(a)$, więc $\mu_a^b(|K|^r)$ jest liczbą monomorfizmów $M(a) \to M(b)$. Podobnie $\varepsilon_a^b(|K|^r)$ jest liczbą epimorfizmów $M(a) \to M(b)$. Ponieważ $\frac{\mu_a^b(|K|^r)}{\alpha_a(|K|^r)}$ jest liczbą całkowitą dla każdego K i r takiego, że istnieje K-algebra R z indeksem symetryzacji r, więc z lematu 3.1 wynika podzielność odpowiednich wielomianów. Określamy zatem $\sigma_a^b = \mu_a^b/\alpha_a$ oraz $\eta_a^b = \varepsilon_a^b/\alpha_a$. □

Możemy przystąpić teraz do dowodu twierdzenia 2.1. Zauważmy najpierw, że jeśli $\mathbf{dim}\, M(b) \neq \mathbf{dim}\, M(a) + \mathbf{dim}\, M(c)$, to $\varphi_{c,a}^b = 0$. Odtąd będziemy zatem zakładać, że $\mathbf{dim}\, M(b) = \mathbf{dim}\, M(a) + \mathbf{dim}\, M(c)$.

Gdy $c = 0$, to $b = a$ oraz $\varphi_{c,a}^b = 1$. Jeśli $c \neq 0$ oraz c nie jest jednorodny, to możemy wybrać $x \in \Gamma_0$ minimalny taki, że $c(x) \neq 0$. Niech $c' = nx$ oraz $c'' = c - c'$. Wtedy $\varphi_{c,a}^b = \sum_d \varphi_{c',d}^b \varphi_{c'',a}^d$. Gdy c jest jednorodny, to $\varphi_{c,a}^b = \sigma_a^b - \sum_{d \neq c} \varphi_{d,a}^b$. Powyższy wzór jest poprawny, gdyż ponieważ dla jeżeli $d \in \mathscr{B}$ jest jednorodny oraz $\mathbf{dim}\, M(c) = \mathbf{dim}\, M(d)$, to $c = d$.

4 Związki z algebrami Liego

Niech $H(R, \mathbb{Z}[T])$ będzie wolnym $\mathbb{Z}[T]$-modułem z bazą $(U_a)_{a \in \mathscr{B}}$ oraz mnożeniem

$$U_a U_a = \sum_b \varphi_{c,a}^b U_b.$$

Można pokazać, że $H(R, \mathbb{Z}[T])$ jest łącznym pierścieniem z 1 zależnym tylko od kołczanu Auslandera–Reiten Γ algebry R Niech $K(\operatorname{mod} R)$ będzie podgrupą w $H(R)_1$ generowaną przez $(U_x)_{x \in \Gamma_0}$. Wtedy $K(\operatorname{mod} R)$ jest podalgebrą Liego w $H(R)_1$ oraz $H(R)_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ jest uniwersalną algebrą obejmującą algebry $K(\operatorname{mod} R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Ponadto, gdy R jest algebrą dziedziczną to $K(\operatorname{mod} R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ jest izomorficzna z częścią dodatnią odpowiedniej półprostej algebry Liego.