MINOROWE DEGENERACJE ALGEBRY MACIERZY

NA PODSTAWIE REFERATU DANIELA SIMSONA

Przez cały referat K będzie ustalonym ciałem.

1. Wstępne idee

Załóżmy, że dany jest ciąg $n \times n$-macierzy $q = (q^{(1)}, \dots, q^{(n)})$. W przestrzeni $\mathbb{M}_n(K)$ określamy mnożenie $\cdot_q : \mathbb{M}_n(K) \times \mathbb{M}_n(K) \to \mathbb{M}_n(K)$ wzorem

$$(\lambda' \cdot_q \lambda'')_{i,j} = \sum_{s \in [1,n]} \lambda'_{i,s} q^{(s)}_{i,j} \lambda''_{s,j}.$$

Podstawowe własności tego mnożenia zawarte są w następującym lemacie.

Lemat.

(1) *Macierz identycznościowa* Id_n *spełnia warunek* $\mathrm{Id}_n \cdot_q \lambda = \lambda = \lambda \cdot_q \mathrm{Id}_n$ *dla wszystkich* $\lambda \in \mathbb{M}_n(K)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$q^{(j)}_{i,j} = 1 = q^{(j)}_{i,j}$$

dla wszystkich $i, j \in [1, n]$.

(2) *Mnożenie* $\cdot_q$ *jest łączne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$q^{(r)}_{i,s} q^{(s)}_{i,j} = q^{(r)}_{i,j} q^{(s)}_{r,j}$$

dla dowolnych $i, j, r, s \in [1, n]$.

Niech $\mathbb{S}_n(K)$ będzie zbiorem wszystkich ciągów q spełniających powyższe warunki. Dla $q \in \mathbb{S}_n(K)$ przez A_q oznaczać będziemy zdefiniowaną powyżej algebrę. Algebry tej postaci nazywamy minorowymi degeneracjami algebry $\mathbb{M}_n(K)$.

Zauważmy, że gdy $q^{(r)}_{i,j} = 1$ dla wszystkich $i, j, r \in [1, n]$, to A^q jest zwykłą algebrą macierzy. Zbadamy teraz dokładniej sytuację, gdy $n = 2$. W tej sytuacji

$$\mathbb{S}_2 = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \;\middle|\; \mu \in K \right\}$$

i piszemy $A(\mu)$ zamiast A^q. Można pokazać, że algebra $A(\mu)$ jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu \neq 0$. Gdy $\mu \neq 0$, to $A(\mu) \simeq \mathbb{M}_2(K)$.

Data: 22 luty 2005.

Przyjrzymy się teraz dokładniej sytuacji $\mu = 0$. Niech $A = A(0)$. Łatwo sprawdzić, że A jest algebrą kołczanu

$$\begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[r, bend right, "\beta"'] & \overset{y}{\bullet} \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

ograniczonego przez relacje $\alpha\beta$, $\beta\alpha$. Algebra ta posiada strukturę algebry Hopfa zadaną przez warunki

$$\begin{gathered} \varepsilon(x) = 1, \quad \varepsilon(y) = 0, \quad \varepsilon(\alpha) = 0, \quad \varepsilon(\beta) = 0 \\ S(x) = x, \quad S(y) = y, \quad S(\alpha) = -\alpha, \quad S(\beta) = -\beta, \\ \Delta(x) = x \otimes x + y \otimes y, \quad \Delta(y) = x \otimes y + y \otimes x, \\ \Delta(\alpha) = x \otimes \alpha + \alpha \otimes x + \beta \otimes y - y \otimes \beta, \\ \Delta(\beta) = x \otimes \beta + \beta \otimes x + \alpha \otimes y - y \otimes \alpha. \end{gathered}$$

Jeśli $\operatorname{char} K \neq 2$, to algebra ta jest izomorficzna z algebrą Sweedlera $K\langle t_1, t_2\rangle/(t_1^2 - 1, t_2^2, t_1t_2 - t_2t_1)$.

2. Podstawowe fakty i własności ogólne

Niech $e_{i,j} \in \mathbb{M}_n(K)$ będzie macierzą, która na miejscu (i, j) ma 1, a na pozostałych 0. Niech $e_i = e_{i,i}$. Zauważmy, że

$$e_{i,s} \cdot_q e_{r,j} = \delta_{r,s} q_{i,j}^{(r)} e_{i,j}.$$

Wiele własności algebr A_q można wyrazić w terminach ciągu q.

Twierdzenie.

(1) *$A_q = e_1A_q \oplus \cdots \oplus e_nA_q$ jest rozkładem na nierozkładalne prawe A_q-moduły.*
(2) *$\operatorname{Hom}(e_iA_q, e_jA_q) \simeq e_jAe_i \simeq Ke_{i,j}$, zatem $\operatorname{End}(e_iA_q) \simeq K$.*
(3) *$e_iA_q \simeq e_jA_q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q_{j,j}^{(i)} = q_{i,i}^{(j)} \neq 0$.*
(4) *Algebra A_q jest bazowa wtedy i tylko wtedy, gdy $q_{i,i}^{(r)} = 0$ dla wszystkich $i \neq r$. W powyższej sytuacji:*
   - *radykał Jacobsona $J = \{\lambda \in A^q \mid \lambda_{i,i} = 0\}$ oraz $J^n = 0$;*
   - *każdy ideał dwustronny jest generowany przez $e_{i,j}$;*
   - $\operatorname{gl.dim} A_q = \infty$*;*
   - *kołczan Gabriela algebry A_q ma wierzchołki $\{1, \ldots, n\}$ oraz mamy strzałkę $i \to j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q_{i,j}^{(r)} = 0$ dla wszystkich $r \neq i, j$.*

Jako wniosek z powyższego twierdzenia otrzymujemy następująca charakteryzację algebr półprostych.

Wniosek. *Algebra A_q jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy $q_{i,i}^{(1)} \neq 0$ dla wszystkich $i \neq 1$.*

Zauważmy, że jeśli ciąg q^{tr} jest otrzymany z ciągu q przez transponowanie macierzy, to algebry A_q oraz $A_{q^{\mathrm{tr}}}^{\mathrm{op}}$ są izomorficzne. Ponadto grupa S_n działa na zbiorze $\mathbb{S}_n$ zgodnie ze wzorem

$$(\sigma q)_{i,j}^{(r)} = q_{\sigma(i),\sigma(j)}^{(\sigma(r))}.$$

W powyższej sytuacji mamy $A_{\sigma q} \simeq A_q$.

3. Informacje o degeneracjach algebr

Przypomnijmy, że przez rozmaitość $\mathrm{Alg}_K(d)$ K-algebr wymiaru d rozumiemy podzbiór funkcji $\mu : [1, n]^3 \to K$ takich, że mnożenie w K^d dane wzorem

$$e_i \cdot e_j = \sum_{r=1}^{n} \mu_{i,j,r} e_r$$

jest łączne oraz posiada element neutralny. Na rozmaitości $\mathrm{Alg}_K(d)$ działa grupa $\mathrm{GL}_d(K)$ w taki sposób, że μ i μ' wyznaczają izomorficzne algebry wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tej samej orbity. Mówimy, że μ' jest degeneracją μ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu' \in \overline{\mathrm{GL}_d(K)\mu}$. Mamy naturalne zanurzenie $\mathbb{S}_n(K) \hookrightarrow \mathrm{Alg}_K(n^2)$.

Niech $\mathbb{G}_n(K) = S_n \ltimes \mathscr{T}_n$, gdzie $\mathscr{T}_n = \{t \in \mathbb{M}_n(K) \mid t_{i,i} = 1,\ t_{i,j} \neq 0\}$ z mnożeniem $(t't'')_{i,j} = t'_{i,j} t''_{i,j}$. Grupa $\mathscr{T}_n$ działa na $\mathbb{S}_n$ zgodnie ze wzorem

$$(tq)_{i,j}^{(r)} = q_{i,j}^{(r)} t_{i,r}^{-1} t_{i,j} t_{r,j}^{-1}.$$

Działanie to rozszerza się do działania grupy $\mathbb{G}_n(K)$. Można pokazać, że algebry A_q i $A_{q'}$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tej samej orbity ze względu na działanie grupy $\mathbb{G}_n(K)$.