ALGEBRY HALLA I ALGEBRY LIEGO

NA PODSTAWIE REFERATU JUSTYNY KOSAKOWSKIEJ

Przez cały referat $Q = (Q_0, Q_1)$ będzie ustalonym kołczanem Dynkina jednego z typów $\mathbb{A}$, $\mathbb{D}$ lub $\mathbb{E}$.

1. Algebry Halla

Dla ustalonego ciała skończonego K definiujemy $\mathscr{H}(KQ)$ jako wolną grupę abelową, której baza $(u_{[M]})$ indeksowana jest klasami izomorfizmów KQ-modułów, z mnożeniem zdefiniowanym wzorem

$$u_{[N_1]}u_{[N_2]} = \sum_{[M]} F^M_{N_1,N_2} u_{[M]},$$

gdzie dla ustalonych modułów M, N_1, ..., N_t, symbolem $F^M_{N_1,\dots,N_t}$ oznaczamy ilość filtracji

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_t = 0$$

takich, że $M_{i-1}/M_i \simeq N_i$ dla wszystkich $i = 1, \dots, t$. W szczególności $F^M_{N_1,N_2}$ jest ilością podmodułów U modułu M takich, że $U \simeq N_2$ i $M/U \simeq N_1$. Powyższe mnożenie jest łączne,

$$u_{[N_1]}u_{[N_2]} \cdots u_{[N_t]} = \sum_{[M]} F^M_{N_1,N_2,\dots,N_t} u_{[M]}.$$

Elementem neutralnym tego mnożenie jest $u_{[0]}$. Mnożenie to zwykle nie jest przemienne. Algebrę $\mathscr{H}(KQ)$ nazywamy algebrą Halla. Algebra $\mathscr{H}(KQ)$ jest algebrą z $\mathbb{Z}^{Q_0}$-gradacją: dla $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$, $\mathscr{H}(KQ)_{\mathbf{d}}$ jest podgrupą w $\mathscr{H}(KQ)$ generowaną przez elementy $u_{[M]}$ takie, że $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{d}$.

Algebrę $\mathscr{H}(KQ)$ możemy przedstawić jako algebrę generowaną przez elementy $u_{[S_v]}$, $v \in Q_0$, oraz relacje

- $u_{[S_v]}u_{[S_v]}u_{[S_w]} - (q+1)u_{[S_v]}u_{[S_w]}u_{[S_v]} + qu_{[S_w]}u_{[S_v]}u_{[S_v]} = 0$ oraz $u_{[S_v]}u_{[S_w]}u_{[S_w]} - (q+1)u_{[S_w]}u_{[S_v]}u_{[S_w]} + qu_{[S_w]}u_{[S_w]}u_{[S_v]} = 0$, gdy istnieje strzałka $v \to w$,
- $u_{[S_v]}u_{[S_w]} - u_{[S_w]}u_{[S_v]} = 0$, gdy wierzchołki v i w nie są połączone strzałką. .

Date: 22.03.2005.

2. Wielomiany Halla i generyczna algebra Halla

Niech $q : \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$ będzie formą Eulera. Istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem $\mathscr{R}_q^+ = \{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{Q_0} \mid q(\mathbf{v}) = 1\}$ dodatnich pierwiastków formy q a klasami izomorfizmu nierozkładalnych KQ-modułów. Niech $M(\mathbf{v}, K)$ oznacza nierozkładalny KQ-moduł odpowiadający wektorowi $\mathbf{v} \in \mathscr{R}_q^+$. Wzór $M(a, K) = \bigoplus_{\mathbf{v} \in \mathscr{R}_q^+} M(\mathbf{v}, K)^{a(\mathbf{v})}$ rozszerza powyższą bijekcję do zbioru funkcji $a : \mathscr{R}_q^+ \to \mathbb{N}$ i zbioru klas izomorfizmu KQ-modułów.

Twierdzenie (Ringel)**.** *Dla danych funkcji $a, b, c : \mathscr{R}_q^+ \to \mathbb{N}$ istnieje wielomian $\varphi_{a,c}^b \in \mathbb{Z}[T]$ taki, że dla każdego ciała skończonego K*

$$\varphi_{a,c}^b(|K|) = F_{M(a,K),M(c,K)}^{M(b,K)}.$$

Powyższe wielomiany, które są wyznaczone jednoznacznie przez a, b i c, są nazywane wielomianami Halla. Definiujemy generyczną algebrę Halla $\mathscr{H}(Q)$ jako wolny $\mathbb{Z}[T]$-moduł z bazą (u_a) indeksowaną funkcjami $a : \mathscr{R}_q^+ \to \mathbb{N}$ z mnożeniem

$$u_a u_c = \sum_b \varphi_{a,c}^b u_b.$$

Pierścień $\mathscr{H}(Q)$ jest łączną $\mathbb{Z}[T]$-algebrą z jedynką i $\mathbb{Z}^{Q_0}$-gradacją. Dla każdego ciała skończonego K odwzorowanie $u_a \mapsto u_{[M(a,K)]}$ ustala izomorfizm $\mathscr{H}(Q)/(T - |K|) \simeq \mathscr{H}(KQ)$.

3. Algebry Liego

Niech $\mathscr{H}_1(Q)$ będzie $\mathbb{C}$-przestrzenią liniową z bazą (u_a) indeksowaną funkcjami $a : R_q^+ \to \mathbb{N}$ i mnożeniem zdefiniowanym wzorem

$$u_a u_c = \sum_b \varphi_{a,c}^b(1) u_b.$$

Przez $\mathscr{K}_1(Q)$ będziemy oznaczać podprzestrzeń liniową algebry $\mathscr{H}_1(Q)$ rozpiętą przez moduły nierozkładalne.

Twierdzenie (Ringel)**.**
(1) *Algebra $\mathscr{H}_1(Q)$ jest izomorficzna z algebrą $\mathscr{U}(\mathfrak{n}_+(Q))$.*
(2) *$\mathscr{K}_1(Q)$ jest podalgebrą Liego algebry $\mathscr{H}_1(Q)$.*
(3) *Istnieje izomorfizm $\mathbb{C}$-algebr Liego $K_1(Q) \simeq \mathfrak{n}_+(Q)$.*

Wniosek. *$\mathscr{H}_1(Q)$ jest uniwersalną algebra obejmującą algebry $\mathscr{K}_1(Q)$.*

Punkt (2) powyższego twierdzenia jest konsekwencją następującej obserwacji poczynionej przez Ringela: jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{R}_q^+$ oraz $a : \mathscr{R}_q^+ \to \mathbb{N}$ odpowiada modułowi rozkładalnemu, to $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}^a(1) = \varphi_{\mathbf{y},\mathbf{x}}^a(1)$.

Przypomnijmy, że z kołczanem Dynkina Q stowarzyszamy algebrę Liego $\mathfrak{g}(Q)$, która jest generowana przez elementy x_v, y_v, h_v, $v \in Q_0$, oraz relacje

- $[h_v, h_w] = 0$ dla wszystkich v i w,

- $[x_v, y_w] = \delta_{u,v} h_v$ dla wszystkich v i w,
- $[h_v, x_w] = \begin{cases} 2x_v & \text{gdy } v = w, \\ -x_w, & \text{gdy } v \text{ i } w \text{ są połączone strzałką,} \\ 0 & \text{ w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$
- $[h_v, y_w] = \begin{cases} -2y_v & \text{gdy } v = w, \\ y_w, & \text{gdy } v \text{ i } w \text{ są połączone strzałką,} \\ 0 & \text{ w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$
- $[x_v, [x_v, x_w]] = 0$, gdy v i w są połączone strzałką, i $[x_v, x_w] = 0$ w przeciwnym wypadku,
- $[y_v, [y_v, y_w]] = 0$, gdy v i w są połączone strzałką, i $[y_v, y_w] = 0$ w przeciwnym wypadku,

Mamy rozkład $\mathfrak{g}(Q) = \mathfrak{n}_-(Q) \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+(Q)$, gdzie podalgebra $\mathfrak{n}_-(Q)$ jest generowana przez elementy y_v, $u \in Q_0$, $\mathfrak{h}$ przez h_v, $u \in Q_0$, oraz $\mathfrak{n}_+(Q)$ przez x_v, $u \in Q_0$. Łatwo zauważyć, że mamy epimorfizm $\mathscr{U}(\mathfrak{n}_+(Q)) \to \mathscr{H}_1(Q)$ indukowany przez przyporządkowanie $x_v \mapsto u_{[S_v]}$, $x \in Q_0$. Z twierdzenia Poincare–Birkhoff–Witta oraz porównania wymiarów składowych jednorodnych wynika, że jest to izomorfizm. Izomorfizm ten obcina się do izomorfizmu $\mathfrak{n}_+(Q)$ oraz podalgebry Liego algebry $\mathscr{H}_1(Q)$ generowanej przez $u_{[S_v]}$, $v \in Q_0$. Ponieważ wymiar nad $\mathbb{C}$ algebry $\mathfrak{n}_+(Q)$ jest równy $|\mathscr{R}_q^+|$, więc podalgebra Liego algebry $\mathscr{H}_1(Q)$ generowana przez $u_{[S_v]}$, $v \in Q_0$, musi być równa $\mathscr{K}_1(Q)$, co kończy dowód twierdzenia.

4. Związek z grupami kwantowymi

Definiujemy skręconą algebrę Halla w następujący sposób. Niech $A = \mathbb{Z}[X, X^{-1}]$. Przyporządkowanie $T = X^2$ ustala zanurzenie $\mathbb{Z}[T]$ w A. Niech $\mathscr{H}_*(Q) = \mathscr{H}(Q) \otimes_{\mathbb{Z}[T]} A$. W $\mathscr{H}_*(Q)$ definiujemy mnożenie wzorem

$$u_a * u_b = X^{\langle \mathbf{dim}\, a, \mathbf{dim}\, b \rangle} u_a u_b.$$

Można pokazać, że elementy u_{S_v}, $v \in Q_0$, spełniają relacje

- $u_{[S_v]} * u_{[S_v]} * u_{[S_w]} - (X + X^{-1})) u_{[S_v]} v * u_{[S_w]} * u_{[S_v]} + u_{[S_w]} * u_{[S_v]} * u_{[S_v]} = 0$, gdy wierzchołki v i w są połączone strzałką,
- $u_{[S_v]} * u_{[S_w]} - u_{[S_w]} * u_{[S_v]} = 0$, gdy wierzchołki v i w nie są połączone strzałką.

Okazuje się, że otrzymana w ten sposób algebra jest izomorficzna z grupą kwantowa $\mathscr{U}_q(\mathfrak{n}_+(Q))$