SKRZYDŁA W KOŁCZANACH AUSLANDERA–REITEN ALGEBR SAMOINJEKTYWNYCH

NA PODSTAWIE REFERATU MARTY KWIECIEŃ

Przez cały referat K będzie ustalonym ciałem. Dla skończenie wymiarowej łącznej K-algebry z jedynką A, przez $\operatorname{mod} A$ oznaczać będziemy kategorię skończenie wymiarowych prawych A-modułów, zaś $D = \operatorname{Hom}_K(-, K)$ będzie oznaczać standardową dualność. Kołczan Auslandera–Reiten algebry A oznaczymy symbolem Γ_A, zaś $\tau_A = D\operatorname{Tr}$ i $\tau_A^- = \operatorname{Tr} D$ będą translacjami Auslandera–Reiten. Dla modułu M przez $P_A(M)$ i $I_A(M)$ oznaczamy nakrycie projektywne i powłokę injektywną modułu M, odpowiednio. Symbolem $\ell(M)$ oznaczymy długość modułu M, zaś symbolem $\ell\ell(M)$ jego długość Loewy'ego. Algebrę A nazywamy samoinjektywną, jeśli moduły A i $D(A)$ są izomorficzne, tzn. klasy modułów projektywnych i injektywnych pokrywają się. Będziemy odtąd zakładać, że rozważane algebry są samoinjektywne oraz nie są półproste. W powyższej sytuacji dla dowolnego nierozkładalnego projektywnego A-modułu P istnieje kanoniczny ciąg Auslandera–Reiten

$$0 \to \operatorname{rad} P \to P \oplus \operatorname{rad} P/\operatorname{soc} P \to P/\operatorname{soc} P \to 0.$$

Pełny podkołczan kołczanu Γ_A postaci

$$\begin{tikzcd}
M_{0,0} \arrow[dr] & & M_{1,1} \arrow[dr] & & \cdots & & M_{n-1,n-1} \arrow[dr] & & M_{n,n} \\
& M_{0,1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] & & M_{n-1,n} \arrow[ur] & \\
& & \cdots \arrow[dr] & & M_{1,n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] & & \\
& & & M_{0,n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{1,n} \arrow[ur] & & & \\
& & & & M_{0,n} \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

gdzie $n \geq 0$, nazywamy skrzydłem długości $n+1$ indukowanym przez nierozkładalny A-moduł M, jeśli $M_{0,n} = M$ oraz

$$0 \to M_{i,j} \to M_{i,j+1} \oplus M_{i+1,j} \to M_{i+1,j+1} \to 0$$

jest ciągiem Auslander–Reiten dla $i, j \in [0, n-1]$, $i \leq j$, gdzie

$$M_{i+1,i} = 0, \ i \in [0, n-1].$$

Data: 24.03.2005.

Przypomnijmy, że A-moduł M nazywamy uniseryjnym, jeśli zbiór podmodułów modułu M jest liniowo uporządkowany przez inkluzję. Poniższe twierdzenie daje częściową odpowiedź na pytanie, kiedy moduł jest radykałem nierozkładalnego projektywnego A-modułu.

Twierdzenie. *Niech A będzie algebrą samoinjektywną i załóżmy, że nierozkładalny A-moduł M wyznacza skrzydło długości $n+1$ dla $n \geq 1$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *M jest radykałem nierozkładalnego modułu projektywnego.*
(2) *Moduły $M_{1,1}, \dots, M_{n,n}$ są proste oraz $P_A(M_{1,1}), \dots, P_A(M_{n,n})$ są długości Loewy'ego $n+2$.*
(3) *Moduły $M_{1,1}, \dots, M_{n,n}$ są modułami prostymi oraz $I_A(M_{1,1}), \dots, I_A(M_{n,n})$ są długości Loewy'ego $n+2$.*
(4) *Moduł $M_{1,n}$ jest uniseryjny oraz $P_A(M_{1,1}), \dots, P_A(M_{n,n})$ są modułami uniseryjnymi długości $n+2$.*
(5) *Moduł $M_{1,n}$ jest uniseryjny oraz $I_A(M_{1,1}), \dots, I_A(M_{n,n})$ są modułami uniseryjnymi długości $n+2$.*

Ponadto, jeśli spełnione są powyższe warunki, to skrzydło indukowane przez moduł $M_{1,n}$ zawiera same moduły uniseryjne.

Niech $\underline{\operatorname{mod}} A$ oznacza kategorię stabilną. Translacje Auslander–Reiten indukują dwa wzajemnie odwrotne funktory $\tau_A, \tau_A^- : \underline{\operatorname{mod}} A \to \underline{\operatorname{mod}} A$. Mamy też dwa wzajemnie odwrotne funktory syzygi (Hellera) $\Omega_A, \Omega_A^- : \underline{\operatorname{mod}} A \to \underline{\operatorname{mod}} A$, które dowolnemu obiektowi $M \in \underline{\operatorname{mod}} A$ przyporządkowują odpowiednio jądro nakrycia projektywnego oraz kojądro powłoki injektywnej.

Mamy również dwa wzajemnie odwrotne funktory Nakayamy $\nu_A, \nu_A^- : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A$ zdefiniowane jako $\nu_A = D\operatorname{Hom}_A(-, A)$ oraz $\nu_A^- = \operatorname{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(-, A)D$. Wiadomo, że dla dowolnego prostego A-modułu T moduły $\nu_A(T), \nu_A^-(T)$ są proste oraz $\nu_A(P_A(T)) \simeq I_A(T) \simeq P_A(\nu_A(T))$ i $\nu_A^-(I_A(T)) \simeq P_A(T) \simeq I_A(\nu_A^-(T))$. W szczególności $\operatorname{soc} P_A(T) \simeq \nu_A^-(T)$. Wiadomo, że funktory

$$\tau_A, \Omega_A^2\nu_A, \nu_A\Omega_A^2 : \underline{\operatorname{mod}} A \to \underline{\operatorname{mod}} A$$

są izomorficzne. Podobnie, funktory

$$\tau_A^-, \Omega_A^{-2}\nu_A^-, \nu_A^-\Omega_A^{-2} : \underline{\operatorname{mod}} A \to \underline{\operatorname{mod}} A$$

są izomorficzne.

Dla algebry A przez Γ_A^s oznaczamy stabilny kołczan Auslandera–Reiten otrzymany z Γ_A przez usunięcie projektywnych wierzchołków i dołączonych do nich strzałek. Funktory syzygi indukują dwa wzajemnie odwrotne automorfizmy stabilnego kołczanu.

Następujący fakt będzie wielokrotnie wykorzystywany w naszych rozważaniach. Niech

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\binom{\alpha_1}{\beta_1}} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{(\beta_2\ \alpha_2)} M_2 \to 0$$

będzie ciągiem dokładnym. Wtedy α_1 jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy α_2 jest monomorfizmem. Ponadto, gdy te homomorfizmy są monomorfizmami, to $\operatorname{Coker}\alpha_1 \simeq \operatorname{Coker}\alpha_2$. Analogicznie, α_1 jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy α_2 jest epimorfizmem oraz, gdy ten warunek jest spełniony, to $\operatorname{Ker}\alpha_1 \simeq \operatorname{Ker}\alpha_2$.

Zaprezentujemy teraz dowód twierdzenia. Niech A i M będą takie jak w twierdzeniu. Zauważmy, że równoważności (2) $\Leftrightarrow$ (3) oraz (4) $\Leftrightarrow$ (5) wynikają z faktu, ze funktory Nakayamy są wzajemnie odwrotnymi równoważnościami takimi, że $\nu_A(P_A(T)) \simeq I_A(T)$ oraz $\nu_A^-(I_A(T)) \simeq P_A(T)$ dla dowolnego prostego A-modułu T.

Udowodnimy teraz, że warunek (1) implikuje warunki (3) i (5). Załóżmy, że $M = \operatorname{rad} P_A(S)$. Wtedy mamy ciąg Auslandera–Reiten

$$0 \to M \to H \oplus P_A(S) \to P_A(S)/\nu_A^-(S) \to 0$$

gdzie $H = \operatorname{rad} P_A(S)/\nu_A^-(S)$. Moduły $M_{i,j}$ nie są ani projektywne ani injektywne, gdyż A jest algebrą samoinjektywną. Stąd można pokazać, że odwzorowania $\alpha_{i,j} : M_{i,j} \to M_{i,j+1}$, $i, j \in [0, n-1]$, $i \leq j$, są monomorfizmami, zaś odwzorowania $\beta_{i,j} : M_{i,j} \to M_{i+1,j}$, $i, j \in [0, n]$, $i < j$, są epimorfizmami.

Niech $X_{i,j} = \Omega_A^- M_{i,j}$ dla $i, j \in [0, n]$, $i \leq j$. Wtedy $X_{n,n} = S$. Ponadto dla każdego $i, j \in [0, n-1]$, $i < j$, mamy ciąg Auslandera–Reiten

$$0 \to X_{i,j} \to X_{i+1,j} \oplus X_{j,j+1} \to X_{i+1,j+1} \to 0.$$

Istotnie, w przeciwnym wypadku istniałby prosty A-moduł T taki, że $X_{i+1,j+1} \simeq P_A(T)/\nu_A^-(T)$, a więc $M_{i+1,j+1} \simeq \nu_A^-(T)$ byłby modułem prostym. Mamy jednak właściwy monomorfizm $\alpha_{i+1,j} \cdots \alpha_{i+1,i+1} : M_{i+1,i+1} \to M_{i+1,j+1}$, co jest niemożliwe.

Udowodnimy teraz, że istnieją proste A-moduły $T_1, \ldots, T_n$ takie, że $P_i = P_A(T_i)$ mamy $X_{i-1,i-1} = \operatorname{rad} P_i$ oraz $X_{i,i} = P_i / \operatorname{soc} P_i$. Istotnie, zdefiniujmy nieprzywiedlne morfizmy $\gamma_{i,j} : X_{i,j} \to X_{i,j+1}$, $i, j \in [0, n-1]$, $i \leq j$, oraz $\delta_{i,j} : X_{i,j} \to X_{i+1,j}$, $i, j \in [0, n]$, $i < j$. Wtedy wszystkie odwzorowania $\gamma_{i,j}$, $(i, j) \neq (0, 0)$, są epimorfizmami, zaś wszystkie odwzorowania $\delta_{i,j}$, $(i, j) \neq (n-1, n)$, są monomorfizmami. W szczególności ciągi

$$0 \to X_{i,i} \to X_{i,i+1} \to X_{i+1,i+1} \to 0$$

nie mogą być dokładne, co dowodzi istnienia stosownych modułów.

Zauważmy, że mamy równości

$$\ell(X_{i-1,i-1}) = \ell(X_{i,i}) = \ell(P_i) - 1,\ i \in [1, n],$$
$$\ell(X_{i,j}) + \ell(X_{i+1,j+1}) = \ell(X_{i+1,j}) + \ell(X_{i,j+1}),\ i, j \in [0, n-1],\ i < j,$$

oraz

$$\ell(X_{0,n}) = 1,$$

skąd $\ell(X_{i,j}) = n+1+j-i$ oraz $\ell(P_i) = n+2$. Ponadto $M_{i,i} \simeq \Omega_A(X_{i,i}) \simeq \nu_A^-(T_i)$ jest modułem prostym.