ALGEBRY HALLA DLA POSETÓW SKOŃCZONEGO TYPU PRINJEKTYWNEGO

NA PODSTAWIE REFERATU JUSTYNY KOSAKOWSKIEJ

1. Moduły prinjektywne i posety skończonego typu prinjektywnego

Niech I będzie skończonym posetem. Przez $\max I$ oznaczać będziemy zbiór elementów maksymalnych posetu I, zaś $I^- = I \setminus \max I$. Dla ciała K przez KI oznaczać będziemy algebrę incydencyjną posetu I. Moduł M nazywamy prinjektywnym, jeśli istnieje ciąg dokładny

$$0 \to P_0 \to P_1 \to M \to 0$$

taki, że P_0 i P_1 są projektywnymi KI-modułami oraz moduł P_0 jest półprosty. Pełną podkategorię kategorii modułów złożoną z modułów prinjektywnych będziemy oznaczać przez $\operatorname{prin} KI$. Wiadomo, że podkategoria $\operatorname{prin} KI$ jest dziedziczna oraz jest zamkniętą ze względu na rozszerzenia.

Z posetem I stowarzyszamy formę Titsa $q_I : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}$ daną wzorem

$$q_I(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} x_i^2 + \sum_{i \prec j \in I^-} x_i x_j - \sum_{i \prec p \in \max I} x_i x_p.$$

Z modułem prinjektywnym M możemy związać wektor współrzędnych $\mathbf{cdn}\, M$ dany wzorem

$$(\mathbf{cdn}\, M)_i = \begin{cases} \dim_K M_i & i \in \max I, \\ \dim_K (\operatorname{top} M)_i & i \in I^-. \end{cases}$$

Mówimy, że poset I jest skończonego typu prinjektywnego, jeśli istnieje tylko skończenie wiele klas izomorfizmu nierozkładalnych prinjektywnych KI-modułów.

Twierdzenie. *Niech K będzie ciałem oraz niech I będzie skończonym i spójnym posetem. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *Poset I jest skończonego typu prinjektywnego.*
(2) *Forma q_I jest słabo dodatnia.*
(3) *Kołczan Auslandera–Reiten kategorii* $\operatorname{prin} KI$ *jest kołczanem preprojektywnym.*
(4) *Odwzorowanie $X \mapsto \mathbf{cdn}\, X$ indukuje bijekcję pomiędzy klasami izomorfizmu nierozkładalnych modułów prinjektywnych oraz dodatnimi pierwiastkami formy q_I.*

Data: 05.05.2005 i 12.05.2005.

Posety skończonego typu prinjektywnego można również scharakteryzować poprzez opis zabronionych podposetów pikowych. Konsekwencją powyższego twierdzenia jest między innymi możliwość takiego uporządkowania reprezentantów klas izomorfizmu modułów nierozkładalnych $X_1, \dots, X_l$, że $\operatorname{Ext}(X_i, X_j) = 0$ dla $i \le j$ oraz $\operatorname{Hom}(X_i, X_j) = 0$ dla $i > j$.

Zauważmy także, że w powyższej sytuacji kołczan Auslandera–Reiten kategorii modułów prinjektywnych nie zależy od ciała K. Dla wierzchołka x tego kołczanu przez $M(x) = M(x, K)$ oznaczać będziemy odpowiedni moduł. Niech $\mathscr{B}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji ze zbioru wierzchołków kołczanu Auslandera–Reiten do zbioru liczb naturalnych. Dla $a \in \mathscr{B}$ piszemy $M(a) = M(a, K) = \bigoplus_x M(x)^{a_x}$.

Dla $i \in I$ niech S_i oraz P_i oznaczają odpowiednio prosty i projektywny KI-moduł odpowiadający wierzchołkowi i. Ponadto, dla $i \in I^-$ niech Q_i będzie obcięciem modułu P_i do I^-, tzn. $Q_i = P_i / \operatorname{soc} P_i$. Zauważmy, że moduły Q_i, $i \in I^-$, oraz S_i, $i \in \max I$, są modułami prinjektywnymi.

2. Algebry Halla

Niech K będzie ciałem skończonym oraz niech I będzie skończonym i spójnym posetem skończonego typu prinjektywnego. Dla prinjektywnych KI-modułów X, Y, Z definiujemy

$$F^Y_{Z,X} = |\{U \subseteq Y \mid U \simeq X,\, Y/U \simeq Z\}|.$$

Ogólniej, dla $Y, X_1, \dots, X_t \in \operatorname{prin} KI$ piszemy

$$F^Y_{X_1,\dots,X_t} = |\{Y = Y_0 \supseteq \dots \supseteq Y_t = 0 \mid Y_{i-1}/Y_i \simeq X_i,\, i = 1, \dots, t\}|.$$

Niech $\mathscr{H}_{\text{prin}}(KI)$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ z baza u_M indeksowaną klasami izomorfizmu prinjektywnych KI-modułów. W $\mathscr{H}_{\text{prin}}(KI)$ definiujemy mnożenie wzorem

$$u_{N_1} u_{N_2} = \sum_{[M]} F^M_{N_1,N_2} u_M.$$

Mnożenie to zadaje w $\mathscr{H}_{\text{prin}}(KI)$ strukturę łącznej $\mathbb{C}$-algebry z jedynką u_0.

Niech $u_p = u_{S_p}$ dla $p \in \max I$, $u_i = u_{Q_i}$ dla $i \in I^-$ oraz $q = |K|$.

Lemat. *W algebrze $\mathscr{H}_{\text{prin}}(KI)$ spełnione są relacje:*

(1) $u_i u_j = q u_j u_i$, $i \prec j \in I^-$,
(2) $u_i u_j = u_j u_i$, $i, j \in I$, $i \not\preceq j$ *oraz* $j \not\preceq i$,
(3) $u_i u_p^2 - (q+1) u_p u_i u_p + q u_p^2 u_i = 0$, $i \prec p \in \max I$,
(4) $u_i^2 u_p - (q+1) u_i u_p u_i + q u_p u_i^2 = 0$, $i \prec p \in \max I$,
(5) $[u_j, [u_i, u_p]] = 0$, $i \prec j \prec p \in \max I$.

Relacje opisane w powyższym lemacie będziemy oznaczać $\mathscr{R}^q_I$.

Dowód. Relacje te są konsekwencją elementarnych rozważań wykorzystujących następujące równości zachodzące dla $i, j \in I^-$ oraz $p, q \in \max I$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}(Q_i, Q_j) = K,\ j \preceq i, && \operatorname{Ext}(Q_i, Q_j) = 0,\\
&\operatorname{Hom}(Q_i, Q_j) = 0,\ j \not\preceq i, && \operatorname{Ext}(S_p, S_q) = 0,\\
&\operatorname{Hom}(S_p, S_p) = K, && \operatorname{Ext}(S_p, Q_i) = 0,\\
&\operatorname{Hom}(S_p, S_q) = 0,\ p \neq q, && \operatorname{Ext}(Q_i, S_p) = K,\ i \prec p,\\
&\operatorname{Hom}(S_p, Q_i) = 0, && \operatorname{Ext}(Q_i, S_p) = 0,\ i \not\prec p,\\
&\operatorname{Hom}(Q_i, S_p) = 0,
\end{aligned}$$

oraz fakt, że kategoria modułów prinjektywnych jest skierowana. □

Podobnymi metodami dowodzimy następujący fakt.

Stwierdzenie. *Niech $X_1, \ldots, X_m$ będą nierozkładalnymi prinjektywnymi KI-modułami takimi, że*

$$\operatorname{Ext}(X_i, X_j) = 0,\ i \leq j, \qquad \operatorname{Hom}(X_i, X_j) = 0,\ i > j.$$

Jeśli $a \in \mathbb{N}^m$, to

$$u_{X_1}^{a_1} \cdots u_{X_m}^{a_m} = \prod_{i=1}^{m} \psi_{a_i}(q) u_{\bigoplus_{i=1}^m X_i^{a_i}}$$

oraz

$$u_{X_1^{a_1}} \cdots u_{X_m^{a_m}} = u_{\bigoplus_{i=1}^m X_i^{a_i}},$$

gdzie $\psi_e(T) = \frac{(1-T)\cdots(1-T^e)}{(1-T)^e} \in \mathbb{Z}[T]$. □

Zauważmy, że $\psi_e(1) = e!$.

Lemat. *Przypuśćmy, że $I' = \{1, \ldots, n\}$ oraz $\max I = \{n+1, \ldots, n+k\}$, przy czym $i \preceq j$ implikuje, że $i < j$. Wtedy*

$$u_{Q_1^{d_1}} \cdots u_{Q_n^{d_n}} u_{S_{n+1}}^{d_{n+1}} \cdots u_{S_{n+k}}^{d_{n+k}} = \sum_{\mathbf{cdn}\, M = \mathbf{d}} u_M.$$

Dowód. Niech $Q = \bigoplus Q_i^{d_i}$ oraz $S = \bigoplus S_i^{d_i}$. Z poprzedniego stwierdzenia wynika, że

$$u_{Q_1^{d_1}} \cdots u_{Q_n^{d_n}} u_{S_{n+1}}^{d_{n+1}} \cdots u_{S_{n+k}}^{d_{n+k}} = u_Q u_S.$$

Teza wynika w łatwy sposób z tej obserwacji. □

Lemat. *Algebra $\mathscr{H}_{\mathrm{prin}}(KI)$ jest generowana przez elementy u_i, $i \in I$.*

Dowód. Przez indukcję ze względu na $\mathbf{cdn}\, M$ udowodnimy, że u_M należy do podalgebry $\mathscr{A}$ generowanej przez elementy u_i, $i \in I$. Gdy $\mathbf{cdn}\, M = 0$, to teza jest oczywista, załóżmy zatem, że $\mathbf{d} = \mathbf{cdn}\, M \neq 0$.

Jeśli moduł M jest rozkładalny, to teza wynika z powyższego stwierdzenia oraz założenia indukcyjnego. Gdy N jest modułem nierozkładalnym, to z poprzedniego lematu wiemy, że

$$u_M = v - \sum_{\mathbf{cdn}\, N = \mathbf{d},\, N \not\simeq M} u_N,$$

dla pewnego $v \in \mathscr{A}$. Ponieważ moduł N jest rozkładalny, jeśli $\mathbf{cdn}\, N = \mathbf{d}$ oraz $N \not\simeq M$, więc teza wynika z udowodnionej już części tezy indukcyjnej. □

3. Specjalizacja algebry Halla do 1

Twierdzenie. *Niech I będzie posetem skończonego typu prinjektywnego, $a, b, c \in \mathscr{B}$. Istnieją wielomiany $\varphi^b_{c,a} \in \mathbb{Z}[T]$ takie, że dla dowolnego ciała skończonego K zachodzi*

$$\varphi^b_{c,a}(|K|) = F^{M(b,K)}_{M(c,K),M(a,K)}$$

Wykorzystując powyższe twierdzenie możemy zdefiniować $\mathbb{C}(t)$-algebrę $\mathscr{H}_{\mathrm{prin}}(I)$ z bazą liniową u_a, $a \in \mathscr{B}$, i mnożeniem

$$u_a u_b = \sum_c \varphi^c_{a,b} u_c.$$

Analogicznie definiujemy algebrę $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_{\mathrm{prin}}(I)_1$ nad $\mathbb{C}$ wykorzystując wartości wielomianów $\varphi^c_{a,b}$ w 1.

Wniosek. *Algebra $\mathscr{H}_{\mathrm{prin}}(I)$ (odpowiednio, $\mathscr{H}_{\mathrm{prin}}(I)_1$) jest generowana przez elementy u_i, $i \in I$, oraz generatory te spełniają relacje $\mathscr{R}^t_I$ ($\mathscr{R}^1_I$).*

Dowód. Ponieważ $\psi_e(1) = e! \neq 0$, więc możemy powtórzyć argumenty z poprzedniego paragrafu. □

Niech $\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}_{\mathrm{prin}}(I)_1$ będzie $\mathbb{C}$-podprzestrzenią liniową algebry $\mathscr{H}_1$ generowana przez elementy odpowiadające pierwiastkom formy q_I.

Stwierdzenie.

(1) *$\mathscr{K}_1$ jest podalgebrą Liego algebry $\mathscr{H}_1$ ze standardowym nawiasem Liego.*
(2) *$\mathscr{H}_1$ jest uniwersalną algebrą obejmującą algebry $\mathscr{K}_1$.*
(3) *$\mathscr{K}_1$ jest generowana jako algebra Liego przez elementy u_i, $i \in I$, oraz spełnione są relacje $\mathscr{R}^1_I$.*

Dowód. Punkt (a) jest konsekwencją następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Niech x i y będą pierwiastkami formy q_I oraz niech $a \in \mathscr{B}_I$ będzie modułem rozkładalnym. Wtedy $\varphi^a_{x,y}(1) = \varphi^a_{y,x}(1)$.*

Dla dowodu punktu (b) zauważmy, że możemy uporządkować x_1, …, x_m pierwiastki formy q_I w ten sposób że dla każdego ciała K $\mathrm{Ext}^1(M(x_i), M(x_j)) = 0$, $i \leq j$, oraz $\mathrm{Hom}(M(x_i), M(x_j)) = 0$, $i > j$.

Wtedy $u_a = \prod_i \frac{u_{x_i}^{a(x_i)}}{a(x_i)!}$. Powyższy wzór wraz z twierdzeniem o bazie Poincare-Birkhoff-Witta implikuje tezę.

Punkt (c) wynika z faktu, że $\mathscr{H}_1$ jest uniwersalną algebrą obejmującą oraz, że jest generowana przez elementy u_i, $i \in I$. $\square$

Na zakończenie referatu udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *$\mathscr{K}_1 \simeq \mathbb{C}\,\mathrm{Lie}\langle u_i \mid i \in I\rangle/\mathscr{R}_I^1$ oraz $\mathscr{H}_1 \simeq \mathbb{C}\langle u_i \mid i \in I\rangle/\mathscr{R}_I^1$.*

Zauważmy, że mamy oczywisty epimorfizm $\mathscr{L} = \mathbb{C}\,\mathrm{Lie}\langle u_i \mid i \in I\rangle/\mathscr{R}_I^1 \to \mathscr{K}_1$. Aby pokazać, że jest to izomorfizm wystarczy udowodnić, że $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{L} \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{K}_1$, który jest równy ilości pierwiastków formy q_I.

Rozważmy dwuliniową formę symetryczną $(x, y) = q_I(x+y)-q_I(x)-q_I(y)$. Wtedy

$$\langle e_i, x\rangle = 2x_i + \sum_{j \prec i} x_j + \sum_{i \prec j \in I^-} x_j - \sum_{i \prec p \in \max I} x_p,\ i \in I^-,$$

oraz

$$\langle e_p, x\rangle = 2x_p - \sum_{j \prec p} x_j,\ p \in \max I.$$

Lemat.

(1) *Jeśli x jest pierwiastkiem formy q_I, to $x - \langle e_i, x\rangle e_i$ jest również pierwiastkiem formy q_I.*
(2) *Jeśli x jest dodatnim pierwiastkiem q_I, $i \in I$ oraz $x \neq e_i$, to $|\langle e_i, x\rangle| \leq 1$ i $q(x - e_i) > 0$.*
(3) *Jeśli x jest pierwiastkiem formy q_I, to $\langle e_i, x\rangle = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = e_i$.*
(4) *Jeśli z jest pierwiastkiem formy q_I, to istnieje ciąg $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ pierwiastków formy q_I taki, że $x^{(1)} = z$, $x^{(i)} = x^{(i-1)} - e_{j_i}$, $i = 2, \ldots, m$ dla pewnego $j_i \in I$, oraz $x^{(m)} = e_j$ dla pewnego j.*

Niech $u = [u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}] = [u_{i_1}, [\ldots, u_{i_n}] \ldots]$. Wiadomo, że elementy tej postaci tworzą zbiór generatorów algebry $\mathscr{L}$. Element u nazywamy nierozkładalnym, jeśli $\langle e_{i_k}, e_{k+1} + \cdots + e_{i_n}\rangle = -1$, $k = 1, \ldots, n-1$. Teza twierdzenia wynika z następujących faktów, które dowodzi się kombinatorycznie:

(1) Niech u będzie elementem nierozkładalnym oraz $i \in I$. Jeśli $\langle e_i, e_u\rangle \neq -1$, to $[u_i, u] = 0$, gdzie $e_u = e_{i_1} + \cdots + e_{i_n}$.
(2) Niech $0 \neq u$ będzie elementem nierozkładalnym. Jeśli dla pewnej permutacji $\sigma \in S_n$ element $u_\sigma = [u_{i_{\sigma(1}} \ldots, u_{i_{\sigma(n)}}]$ jest również nierozkładalny i różny od 0, to $u = u_\sigma$.