# Ω-PERIODYCZNOŚĆ Z PUNKTU WIDZENIA TEORII MODELI

NA PODSTAWIE REFERATU STANISŁAWA KASJANA

Przez cały referat będziemy zakładać, że $L \subseteq K$ jest rozszerzeniem ciał algebraicznie domkniętych, zaś $\Lambda$ jest $d$-wymiarową $K$-algebrą zdefiniowaną nad ciałem $L$, tzn. istnieje baza $K$-liniowa $a_1 = 1$, $a_2$, …, $a_d$ algebry $\Lambda$ taka, że stałe strukturalne $\gamma_{i,j,k}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, względem tej bazy należą do $L$.

Dla $s \geq 1$ definiujemy $\operatorname{mod}_\Lambda(s)$ jako zbiór wszystkich ciągów $M = (M_1, \ldots, M_d) \in \mathbb{M}_{s\times s}(K)^d$ takich, że $M_i M_j = \sum_k \gamma_{i,j,k} M_k$ oraz $M_1 = \operatorname{Id}_d$. Przez $\operatorname{ind}_\Lambda(s)$ oznaczać będziemy podzbiór w $\operatorname{mod}_\Lambda(s)$ złożony z modułów nierozkładalnych.

Dla modułów $M$ i $N$ niech $\mathscr{P}(M, N)$ będzie zbiorem tych morfizmów $M \to N$, które faktoryzują się przez moduły projektywne. Definiujemy kategorię $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$, której obiektami są $\Lambda$-moduły, oraz $\underline{\operatorname{Hom}}(M, N) := \operatorname{Hom}_\Lambda(M, N)/\mathscr{P}(M, N)$ dla modułów $M$ i $N$.

Niech $\varphi : M \to N$ oraz niech $\varepsilon : P \to N$ będzie nakryciem projektywnym. Wtedy $\varphi \in \mathscr{P}(M, N)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje morfizm $\phi : M \to P$ taki, że $\varphi = \varepsilon\phi$. Przypomnijmy też, że dla każdego modułu $M$ mamy standardowe nakrycie nakrycie projektywne $\Lambda \otimes_K N \to N$, $\lambda \otimes n \mapsto n$.

Ustalmy dla każdego modułu $N$ nakrycie projektywne $\varepsilon_M : P_M \to M$. Definiujemy $\Omega M := \operatorname{Ker} \varepsilon_M$. Przyporządkowanie to indukuje funktor $\Omega : \underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda \to \underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$. Jeśli $\varepsilon_M$ jest nakryciem standardowym, to $\dim_K \Omega M = (d - 1)s$, gdzie $s := \dim_K M$. Ponadto można wybrać bazę $b_{k,l}$, $k = 2, \ldots, d$, $l = 1, \ldots, s$, modułu $\Omega M$ tak, że

$$a_j b_{k,l} = -M^k_{1,l} b_{j,1} - M^k_{2,l} b_{j,2} - \cdots - M^k_{s,l} b_{j,s} + \gamma_{j,k,2} b_{2,l} + \gamma_{j,k,3} b_{3,l} + \cdots + \gamma_{j,k,d} b_{d,l}.$$

Następujące twierdzenie jest głównym wynikiem referatu.

**Twierdzenie.** *Niech $\Lambda$ będzie $K$-algebrą zdefiniowaną nad ciałem $L$ oraz niech $s \geq 1$. Jeśli dla każdego nierozkładalnego $s$-wymiarowego modułu $M$ istnieje liczba całkowita $n > 0$ taka, że $\Omega^n M \simeq M$ w $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$, oraz $\dim \operatorname{ind}_\Lambda(s) \leq \operatorname{trdeg}_L K$, to istnieje $n_0 > 0$ taka, że $\Omega^{n_0} M \simeq M$ dla każdego nierozkładalnego $s$-wymiarowego modułu $M$.*

Przypomnijmy, że przez $L$-formułę rozumiemy formułę otrzymaną z formuł atomowych postaci $F(x_1, \ldots, x_D) = 0$ dla $F \in L[X_1, \ldots, X_D]$,

*Data*: 19.05.2005.

przez zastosowanie spójników alternatywy, koniunkcji i negacji, oraz kwantyfikatorów.

**Twierdzenie** (Tarski). *Niech $\varphi$ będzie $L$-formułą ze zmiennymi $x_1$, $\dots$, $x_D$. Wtedy istnieje bezkwantyfikatorowa $L$-formuła $\psi$ ze zmiennymi $x_1$, $\dots$, $x_D$ taka, że dla każdego algebraicznie domkniętego rozszerzenia $\tilde{K}$ ciała $L$ i dowolnych elementów $a_1, \dots, a_D \in \tilde{K}$,*

$$\tilde{K} \models \varphi(a_1, \dots, a_D) \iff \tilde{K} \models \psi(a_1, \dots, a_D).$$

Przypomnijmy, że moduł $M$ wymiaru $s$ jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy endomorfizm modułu $M$ jest albo izomorfizmem lub jest nilpotentny stopnia $s$. Ta charakteryzacja modułów nierozkładalnych pozwala napisać $L$-formułę wyrażającą własność bycia modułem nierozkładalnym.

Niech $\varepsilon_0 : \Lambda \otimes_K M \to M$ oraz $\varepsilon_1 : \Lambda \otimes_K \Omega M \to \Omega M$ będą standardowymi nakryciami projektywnymi. Wtedy $M \simeq \Omega M$ w $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizmy $\varphi : M \to \Omega M$, $\psi : \Omega M \to M$, $\mu : M \to \Lambda \otimes_K M$ oraz $\nu : \Omega M \to \Lambda \otimes_K \Omega M$ takie, że $\psi\varphi - \mathrm{Id}_M = \varepsilon_0\mu$ i $\varphi\psi - \mathrm{Id}_{\Omega M} = \varepsilon_1\nu$. Powyższa charakteryzacja pozwala nam zapisać zdanie $M \simeq \Omega M$ przy pomocy $L$-formuły. Analogicznie tworzymy $L$-formułę odpowiadającą warunekowi $M \simeq \Omega^n M$ dla $n > 1$.

**Wniosek.** *Punkty $M$ rozmaitości $\operatorname{mod}_\Lambda(s)$ takie, że $\Omega^n M \simeq M$ w $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$, tworzą zbiór konstruktywny.*

Główny wynik referatu wynika z następującego twierdzenia, którego dowodowi poświęcona jest pozostała część referatu. Dla $L$-formuły $\varphi$ z $D$-zmiennymi oraz rozszerzenia $\tilde{K}$ ciała $L$ przez $\varphi[\tilde{K}]$ oznaczać będziemy zbiór tych ciągów $a \in \tilde{K}^D$ dla których $\tilde{K} \models \varphi(a)$.

**Twierdzenie.** *Niech $\varphi$ oraz $\psi_n$, $n \geq 1$, będą $L$-formułami z $D$ zmiennymi takimi, że $\dim \varphi[K] \leq \operatorname{trdeg}_L K$ oraz $\varphi[K] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi_n[K]$. Wtedy istnieje $n_0 > 0$ taka, że $\varphi[K] \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} \psi_n[K]$.*

Warto podkreślić fakt, że twierdzenie to staje się interesujące w sytuacji, gdy $K$ jest ciałem przeliczalnym. W sytuacji ciał nieprzeliczalnych można bowiem korzystać z faktu udowodnionego przez Gabriela w LNM 488. Zauważmy także, że warunek $\dim \varphi[K] \leq \operatorname{trdeg} K$ nie może być osłabiony. Jeśli $L = \overline{\mathbb{Q}}$, $K = \overline{\mathbb{Q}(x)}$, to $\operatorname{trdeg}_L K = 1 < 2 = \dim K^2$ oraz $K^2 = \bigcup_{F \in \mathbb{Z}[X,Y],\, F \neq 0} V_K(F)$, ale $K^2$ nie jest sumą skończonej ilości zbiorów powyższej postaci.

Niech $I$ będzie zbiorem. Rodzinę $\mathscr{F} \subseteq 2^I$ nazywamy ultrafiltrem, jeśli

(1) $\varnothing \notin \mathscr{F}$,
(2) jeśli $A, B \in \mathscr{F}$, to $A \cap B \in \mathscr{F}$,
(3) jeśli $A \in \mathscr{F}$ i $B \subseteq I$, to $A \cup B \in \mathscr{F}$,
(4) jeśli $A \notin \mathscr{F}$, to $I \setminus A \in \mathscr{F}$.

Ultrafiltr $\mathscr{F}$ definiuje relacje równoważności $\sim$ w $K^I$,

$$(a^i) \sim (b^i) \iff \exists U \in \mathscr{F}\ \forall i \in U\ a^i = b^i.$$

Niech $K^I/\mathscr{F} := K^I/\sim$. Elementy tego zbioru oznaczamy $(a^i)^{\mathscr{F}}$. W zbiorze $K^I/\mathscr{F}$ definiujemy działania dodawania i mnożenia po współrzędnych. Okazuje się, że $K^I/\mathscr{F}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym (dla dowodu można wykorzystać twierdzenia Łosia). Ponadto mamy naturalne zanurzenie ciała $L$ w ciało $K^I/\mathscr{F}$.

Udowodnimy teraz powyższe twierdzenie. Możemy założyć, że $\varphi$ i $\psi_n$, $n \geq 1$, są formułami bezkwantyfikatorowymi. Niech $C := \varphi[K]$. Bez straty ogólności możemy założyć, że ideał $I(C)$ funkcji regularnych znikających na $C$ jest pierwszy oraz jest generowany przez wielomiany $F_1, \ldots, F_r \in L[X_1, \ldots, X_D]$. Wtedy także ideał pierścienia $L[X]$ generowany przez wielomiany $F_1, \ldots, F_r$ jest pierwszy oraz wymiary Krulla pierścienia $L[X]/(F_1, \ldots, F_r)$ jest równy $\dim C$.

Załóżmy, że dla każdej liczby całkowitej $m > 0$, $C \not\subseteq \bigcup_{n=1}^m \psi_n[K]$. Wtedy możemy wybrać ciąg $a^m = (a_1^m, \ldots, a_D^m) \in C \setminus \bigcup_{n=1}^m \psi_n[K]$, tzn.

$$K \models \varphi(a^m) \text{ oraz } K \not\models \psi_n(a^m),\ m \geq n.$$

Niech $\mathscr{F}$ będzie ultrafiltrem nad $\mathbb{N}$ nie zawierającym zbiorów skończonych, $\tilde{K} := K^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}$ oraz $\tilde{a} := (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_D) \in \tilde{K}^D$, gdzie $\tilde{a}_i := (a_i^m)^{\mathscr{F}}$. Z twierdzenia Łosia wynika, że

$$\tilde{K} \models \varphi(\tilde{a}) \text{ oraz } \tilde{K} \not\models \psi_n(\tilde{a}),\ n \geq 1.$$

W szczególności $F_i(\tilde{a}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, więc istnieje surjektywny homomorfizm pierścieni $L[X]/(F_1, \ldots, F_n) \to L[\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_D] \subset \tilde{K}$. Stąd

$$\operatorname{trdeg}_L K \geq \operatorname{trdeg}_L(L[X]/(F_1, \ldots, F_n))_0 \geq \operatorname{trdeg}_L L(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_D),$$

a więc istnieje $L$-zanurzenie $u : L(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_D) \to K$. Niech $b_i := u(\tilde{a}_i)$, $i = 1, \ldots, d$. Wtedy $b \in C \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \psi_n[K]$, co jest niemożliwe.

Zauważmy jeszcze, że podobnymi metodami można udowodnić, że jeśli $X$ jest nieprzywiedlną rozmaitością afiniczną nad ciałem $K$ oraz $\mathscr{F}$ jest ultrafiltrem nad $X$ zawierającym wszystkie niepuste podzbiory otwarte, to $\operatorname{trdeg} K^X/\mathscr{F} = \dim X$.