O ROZMAITOŚCIACH TORYCZNYCH

NA PODSTAWIE REFERATU NGUYEN QUANG LOCA

Przez cały referat K oznaczać będzie ustalone ciało algebraicznie domknięte.

1. Przez cały referat N oznaczać będzie ustaloną kratę izomorficzną z kratą $\mathbb{Z}^n$, zaś $M := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$. Ponadto $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ i $M_{\mathbb{R}} := \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(N_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}^n)^*$.

Wymiernymi stożkami wielościennymi w przestrzeni $N_{\mathbb{R}}$ nazywamy zbiory postaci

$$\operatorname{cone}(v_1, \ldots, v_t) := \mathbb{R}^+ v_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ v_t$$

dla wektorów $v_1, \ldots, v_t \in N$. Stożkiem dualnym do stożka $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ nazywamy podzbiór $\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$ dany wzorem

$$\sigma^\vee := \{u \in M_{\mathbb{R}} \mid u(v) \geq 0 \text{ dla wszystkich } v \in \sigma\}.$$

Twierdzenie Farkasa orzeka, że jeśli σ jest wymiernym stożkiem wielościennym w przestrzeni $N_{\mathbb{R}}$, to $\sigma^\vee$ jest wymiernym stożkiem wielościennym w przestrzeni $M_{\mathbb{R}}$.

Ścianami wymiernego stożka wielościennego $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ nazywamy zbiory postaci $\sigma \cap u^\perp$ dla wektorów $u \in \sigma^\vee$, gdzie

$$u^\perp := \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid u(v) = 0\}$$

dla wektora $u \in M_{\mathbb{R}}$. Łatwo pokazać, że ściany wymiernego stożka wielościennego są wymiernymi stożkami wielościennymi oraz że przekrój dwóch ścian jest ścianą.

Wymierny stożek wielościenny $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ nazywamy ściśle wypukłym, jeśli $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$. Warunek ten jest równoważny warunkowi, że zbiór $\{0\}$ jest ścianą stożka σ, oraz warunkowi, że $\dim \sigma^\vee = n$. Będziemy odtąd zakładać, że stożki rozważane w przestrzeni $N_{\mathbb{R}}$ są ściśle wypukłymi wymiernymi stożkami wielościennymi i nazywali je po prostu stożkami.

Jeśli $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ jest stożkiem, to półgrupę $S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$ nazywamy półgrupą stożka σ. Półgrupa S_σ jest skończenie generowana. Istotnie, załóżmy, że stożek $\sigma^\vee$ jest generowany przez wektory $u_1, \ldots, u_t \in M$. Niech

$$K := \Big\{\sum_{i=1}^{t} \delta_i u_i \mid 0 \leq \delta_i \leq 1\Big\}.$$

Ponieważ zbiór K jest zwarty, więc zbiór $K \cap M$ jest skończony. Wtedy półgrupa S_σ jest generowana przez zbiór $K \cap M$.

Data: 27.10.2005, 10.11.2005 i 24.11.2005.

W powyższej sytuacji wiadomo też, że półgrupa S_σ generuje grupę M oraz jest nasycona. Podpółgrupę S wolnej grupy abelowej G nazywamy nasyconą, jeśli z warunku $ku \in S_\sigma$ dla wektora $u \in \langle S \rangle$ oraz liczby całkowitej $k > 0$ wynika, że $u \in S_\sigma$. Pokazuje się też, że jeśli podpółgrupa $S \subset M$ jest skończenie generowana, nasycona i generuje grupę M, to istnieje dokładnie jeden stożek $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ taki, że $S = S_\sigma$.

W dalszych rozważaniach będziemy odwoływać się do następujących przykładów. Dla $\sigma = \mathrm{cone}(e_1, e_2) \subset \mathbb{R}^2$, $\sigma^\vee = \mathrm{cone}(e_1^*, e_2^*)$ oraz $S_\sigma = \langle e_1^*, e_2^* \rangle$. Dla $\sigma = \mathrm{cone}(e_2) \subset \mathbb{R}^2$, $\sigma^\vee = \mathrm{cone}(e_1^*, -e_1^*, e_2^*)$ oraz $S_\sigma = \langle e_1^*, -e_1^*, e_2^* \rangle$. Dla $\sigma = \mathrm{cone}(e_2, 2e_1 - e_2)$, $\sigma^\vee = \mathrm{cone}(e_1^*, e_1^* + 2e_2^*)$ oraz $S_\sigma = \langle e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^* \rangle$. Dla $\sigma = \mathrm{cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subset \mathbb{R}_3$, $\sigma^\vee = \mathrm{cone}(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_1^* + e_2^* - e_3^*)$ oraz $S_\sigma = \langle e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_1^* + e_2^* - e_3^* \rangle$.

Na zakończenie tego paragrafu dodamy jeszcze, że jeśli τ jest ścianą stożka $\sigma \subset N_\mathbb{R}$, to istnieje wektor $u \in S_\sigma$ taki, że $\tau = \sigma \cap u^\perp$ oraz $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}^+(-u)$.

2. Jeśli S jest półgrupą, to przez $K[S]$ oznaczamy K-algebrę półgrupową półgrupy S. Na przykład, $K[\mathbb{N}^n] = K[X_1, \ldots, X_n]$ oraz $K[\mathbb{Z}^n] = K[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$. Jeśli $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ jest stożkiem, to $K[S_\sigma] = K[V]$ jest skończenie generowaną K-algebrą bez dzielników zera różnych zera. Skończona generowalność jest oczywista, zaś brak dzielników zera różnych od zera wynika z faktu, że zanurzenie półgrup $S_\sigma \subset M$ indukuje zanurzenie pierścieni $K[S_\sigma] \subset K[M]$. W szczególności $K[S_\sigma]$ jest pierścieniem współrzędnych pewnej nieprzywiedlnej rozmaitości afinicznej, którą będziemy oznaczać U_σ i nazywamy rozmaitością toryczną stowarzyszoną ze stożkiem σ. Utożsamienie $U_\sigma = \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{algebras}}(K[S_\sigma], K)$ implikuje często wykorzystywaną równość $U_\sigma = \mathrm{Hom}_{\mathrm{semigroups}}(S_\sigma, K)$, gdzie ciało K traktujemy jako półgrupę ze względu na mnożenie.

Jeśli $\sigma = \mathrm{cone}(e_1, \ldots, e_n) \subset \mathbb{R}^n$, to $U_\sigma = K^n$. Ogólniej, gdy $\sigma = \mathrm{cone}(e_1, \ldots, e_d) \subset \mathbb{R}^n$, to $U_\sigma = K^d \times (K^*)^{n-d}$. W szczególności, dla $\sigma = 0$ otrzymujemy $U_\sigma = (K^*)^n$. Rozmaitość tę, która jest jednocześnie grupą algebraiczną, nazywamy n-wymiarowym torusem i oznaczamy T_N.

Gdy $\sigma = \mathrm{cone}(e_2, 2e_1 - e_2)$, to $K[S_\sigma] \simeq K[Z_1, Z_2, Z_3]/(Z_1 Z_3 - Z_2^2)$, zaś dla $\sigma = \mathrm{cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subset \mathbb{R}_3$, $U_\sigma = \mathscr{Z}(Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4) \subset K^4$.

Dla stożka $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ oraz homomorfizmów $x \in U_\sigma$ i $t \in T_N$ definiujemy homomorfizm $tx \in U_\sigma$ wzorem $(tx)(u) = t(u)x(u)$. Uzyskane w ten sposób odwzorowanie $T_N \times U_\sigma \to U_\sigma$ jest działaniem torusa na rozmaitości U_σ. Regularność tego działania wynika z faktu, że stowarzyszony homomorfizm algebr dany jest wzorem $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u$, $u \in S_\sigma$.

Zdefiniujmy homomorfizm $x_0 \in U_\sigma$ wzorem $x_0(u) = 1$, $u \in S_\sigma$. Wtedy $T_N x_0 = \{t|_{S_\sigma} \mid t \in T_N\}$. Zatem odwzorowanie $T_N \to U_\sigma$, $t \mapsto t|_{S_\sigma}$, jest T_N-włożeniem torusa T_N w rozmaitość U_σ. Injektywność tego odwzorowania wynika z faktu, że półgrupa S_σ generuje grupę M. Ogólniej, jeśli τ jest ścianą stożka σ, to odwzorowanie $U_\tau \to U_\sigma$, $x \mapsto x|_{S_\sigma}$, jest otwartym T_N-włożeniem. Otwartość tego odwzorowania wynika z faktu, że opowiada ono włożeniu $K[S_\sigma] \subset K[S_\sigma]_{\chi^u} = K[S_\tau]$, gdzie wektor $u \in M$ jest taki, że $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}^+(-u)$. W szczególności podzbiór $U_0 \subset U_\sigma$ jest otwartą T_N-orbitą.

Wachlarzem w przestrzeni $N_\mathbb{R}$ nazywamy skończony zbiór Δ stożków w przestrzeni $N_\mathbb{R}$ takich, że:

(1) jeśli $\sigma \in \Delta$, to wszystkie ściany stożka σ też należą do wachlarza Δ,
(2) jeśli $\sigma, \sigma' \in \Delta$, to zbiór $\sigma \cap \sigma'$ jest ich wspólną ścianą.

Dla wachlarza Δ definiujemy rozmaitość $X(\Delta)$ jako sklejenie zbiorów U_σ, $\sigma \in \Delta$, przy pomocy włożeń $U_\tau \subset U_\sigma$, gdzie τ jest ścianą stożka σ. Dla przykładu, gdy $\Delta = \{\sigma, -\sigma, 0\}$, gdzie $\sigma = \mathrm{cone}(e_1) \subset \mathbb{R}$, to $K[U_\sigma] \simeq \mathbb{P}^1$. Podobnie, płaszczyznę rzutową $\mathbb{P}^2$ otrzymujemy dla wachlarza Δ, którego stożkami maksymalnymi są stożki $\mathrm{cone}(e_1, e_2)$, $\mathrm{cone}(e_1, -e_1 - e_2)$, $\mathrm{cone}(e_2, -e_1 - e_2)$.

Działanie torusa T_N na rozmaitościach U_σ indukuje działanie na rozmaitości $X(\Delta)$. Otrzymujemy zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Niech Δ będzie wachlarzem w przestrzeni $N_\mathbb{R}$. Wtedy torus T_N działa na rozmaitości $X(\Delta)$, przy czym działanie to indukuje otwarte włożenie torusa T_N.*

Mamy też twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie. *Niech X będzie rozmaitością nieprzywiedlną, rozdzielczą i normalną. Jeżeli torus T_N działa na rozmaitości X w taki sposób, że działanie to indukuje otwarte włożenie torusa T_N, to istnieje (dokładnie jeden z dokładnością do izomorfizmu) wachlarz Δ w przestrzeni $\mathbb{N}_\mathbb{R}$ taki, że $X \simeq X(\Delta)$.*

Dla każdego stożka $\tau \in \Delta$ mamy homomorfizm półgrup $x_\tau : S_\tau \to K$ dany wzorem

$$x_\tau(u) = \begin{cases} 1 & -u \in S_\tau, \\ 0 & -u \notin S_\tau. \end{cases}$$

Przez $\mathscr{O}_\tau$ oznaczać będziemy T_N-orbitę punktu x_τ, zaś przez $V(T)$ jej domknięcie.

Stwierdzenie. *Mamy następujące własności.*

(1) $\mathscr{O}_\tau \simeq (K^*)^{n-\dim\tau}$.
(2) $U_\sigma = \bigcup_{\tau<\sigma} \mathscr{O}_\tau$.
(3) $V(\tau) = \bigcup_{\tau<\gamma} \mathscr{O}_\gamma$.
(4) $\mathscr{O}_\tau = V(\tau) \setminus (\bigcup_{\tau<\gamma, \tau\neq\gamma} V(\gamma)$.

3. Przypomnijmy, że nieprzywiedlną rozmaitość afiniczną nazywamy normalną o ile pierścień $K[V]$ jest całkowicie domknięty w swym ciele ułamków.

Twierdzenie. *Dla każdego stożka σ w przestrzeni $N_{\mathbb{R}}$ pierścień $K[S_\sigma]$ jest całkowicie domknięty w swym ciele ułamków.*

Dowód. Jeśli $\sigma = \mathrm{cone}(v_1, \dots, v_r)$, to $\sigma^\vee = \bigcap_{i=1}^r \mathrm{cone}(v_i)^\vee$, skąd wynika, że $K[S_\sigma] = \bigcap_{i=1}^r K[S_{\mathrm{cone}(v_i)}]$. Możemy zatem założyć, że $\sigma = \mathrm{cone}(v)$ dla pewnego niezerowego wektora v. Wtedy

$$K[S_\sigma] \simeq \begin{cases} K[X_1, X_2, X_2^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}] & v \neq 0 \\ K[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}] & v = 0 \end{cases}$$

co kończy dowód. □

Wniosek. *Rozmaitość toryczne są normalne.*

Wniosek. *Niech S będzie skończenie generowaną podpółgrupą grupy $\mathbb{Z}^n$. Wówczas dziedzina $K[X]$ jest całkowicie domknięta w swoim ciele ułamków wtedy i tylko wtedy, gdy półgrupa S jest nasycona.*

4. Niech R będzie pierścieniem przemiennym i niech P będzie ideałem pierwszym w pierścieniu R. Kres górny długości n łańcuchów $P = P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \cdots \supsetneq P_n$ ideałów pierwszych w pierścieniu R nazywamy wysokością ideału P oraz oznaczamy $\mathrm{ht}(P)$. Dla dowolnego ideału I definiujemy $\mathrm{ht}(I)$ jako kres dolny wysokości wszystkich ideałów pierwszych zawierających ideał I. Wymiarem Krulla $\dim R$ pierścienia R nazywamy kres górny wysokości wszystkich ideałów maksymalnych pierścienia R.

Ciąg a_1, …, a_n elementów pierścienia R nazywamy R-ciągiem o ile
(1) $(a_1, \dots, a_n) \neq R$,
(2) dla każdego indeksu $1 \leq i \leq n$ element a_i nie jest dzielnikiem zera w pierścieniu $R/(a_1, \dots, a_{i-1})$.

Niech R będzie pierścieniem noetherowskim oraz niech I będzie ideałem pierścienia R. Pokazuje się, że maksymalne R-ciągi zawarte w ideale I mają wspólną długość, którą nazywamy głębokością ideału I oraz oznaczamy $\mathrm{depth}(I)$. Pierścień noetherowski R nazywamy pierścieniem Cohena–Macaulaya, jeśli $\mathrm{depth}(m) = \mathrm{ht}(m)$ dla każdego ideału maksymalnego w pierścieniu R. Równoważnie warunek ten można by sformułować dla wszystkich ideałów (pierwszych) pierścienia R.

Twierdzenie. *Jeśli σ jest stożkiem w przestrzeni $N_{\mathbb{R}}$, to pierścień $K[S_\sigma]$ jest pierścieniem Cohena–Macaulaya.*

Wniosek. *Dla dowolnego wachlarza Δ w przestrzeni $N_{\mathbb{R}}$ rozmaitość $X(\Delta)$ jest rozmaitością Cohena–Macauleya.*

Równoważne sformułowanie powyższego twierdzenia jest następujące.

Stwierdzenie. *Niech S będzie nasyconą podpółgrupą skończenie generowaną grupy $\mathbb{Z}^n$. Wtedy pierścień $k[S]$ jest pierścieniem Cohena–Macaulaya.*

Fundamentalnym faktem wykorzystywanym w dowodzie powyższego stwierdzenia, jest następujące twierdzenie.

Stwierdzenie (Hochster, 1972)**.** *Niech M będzie nasyconą podpółgrupą skończenie generowaną półgrupy $\mathbb{N}^n$. Wtedy pierścień $K[M]$ jest pierścieniem Cohena–Macaulaya.*

5. Mówimy, że punkt P rozmaitości afinicznej jest regularny, jeśli

$$\dim K[V]_{m_P} = \dim_K(m_P/m_P^2),$$

gdzie $m_P = \{f \in K[V] \mid f(P) = 0\}$.

Twierdzenie. *Rozmaitość U_σ jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy stożek σ jest generowany przez wektory, które można uzupełnić do bazy kraty N.*