FORMA EULERA ALGEBRY

NA PODSTAWIE REFERATU MAJI SĘDŁAK

Literatura

[1] K. Bongartz, *Algebras and quadratic forms*, J. London Math. Soc. (2) **28** (1983), no. 3, 461–469.

[2] C. M. Ringel, *Representations of K-species and bimodules*, J. Algebra **41** (1976), no. 2, 269–302.

§1. Wiadomości wstępne

Założenie.

Przez cały paragraf R oznacza pierścień.

Definicja.

Rezolwentą projektywną modułu M nazywamy ciąg

$$\cdots \to P_m \to P_{m-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

projektywnych modułów wraz z epimorfizmem $h : P_0 \to M$ takim, że ciąg

$$\cdots \to P_m \to P_{m-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{h} M \to 0$$

jest dokładny. Jeśli $P_n = 0$ dla $n > m$ oraz $P_m \neq 0$, to liczbę m nazywamy długością rezolwenty.

Definicja.

Mówimy, że projektywny wymiar $\operatorname{pd} M$ modułu M jest równy m jest istnieje rezolwenta projektywna modułu M długości m i moduł M nie posiada rezolwenty projektywnej długości $m - 1$.

Własności.

(1) $\operatorname{pd} M = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy moduł M jest projektywny.

(2) Następujące warunki są równoważne:
   - (i) $\operatorname{pd} M \leq n$,
   - (ii) $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, -) = 0$,
   - (iii) funktor $\operatorname{Ext}_R^n(M, -)$ jest prawostronnie dokładny.
   - (iv) jeśli ciąg

     $$0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

     jest dokładny i moduły $P_0, \ldots, P_{n-1}$ są projektywne, to moduł K jest projektywny.

(3) Jeśli ciąg $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ jest dokładny, to
   - (i) $\operatorname{pd} M \leq \max(\operatorname{pd} M', \operatorname{pd} M'')$,

---

Data: 02.03.2006.

   (ii) $\operatorname{pd} M' \leq \max(\operatorname{pd} M, \operatorname{pd} M'')$,
   (iii) $\operatorname{pd} M'' \leq 1 + \max(\operatorname{pd} M, \operatorname{pd} M')$,
   (iv) jeśli $\operatorname{pd} M'' < \operatorname{pd} M' + 1$, to $\operatorname{pd} M = \operatorname{pd} M'$,
   (v) jeśli $\operatorname{pd} M'' > \operatorname{pd} M' + 1$, to $\operatorname{pd} M = \operatorname{pd} M''$.

(4) Jeśli ciąg $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ jest dokładny, moduł M jest projektywny i moduł M'' nie jest projektywny, to $\operatorname{pd} M'' = \operatorname{pd} M' + 1$.

(5) Jeśli ciąg
$$0 \to X_n \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$$
jest dokładny, to $\operatorname{pd} M \leq n + \max_{1 \leq k \leq n} \operatorname{pd} X_k$.

Definicja.

Prawym wymiarem globalnym $\operatorname{rlgldim} R$ pierścienia R nazywamy maksimum wymiarów projektywnym prawych R-modułów. Analogicznie definiujemy lewy wymiar $\operatorname{lgldim} R$ globalny pierścienia R.

Własności.

(1) Jeśli pierścień R jest noetherowski, to $\operatorname{rlgldim} R = \operatorname{lgldim} R$ $(=: \operatorname{gldim} R)$.

(2) Jeśli pierścień R jest skończenie wymiarową K-algebrą, to
$$\begin{aligned} \operatorname{rlgldim} R &= \max\{\operatorname{pd} S \mid S \text{ jest prostym prawym } R\text{-modułem}\} \\ &= \max\{S \text{ jest prostym prawym } R\text{-modułem}\}. \end{aligned}$$

(3) Jeśli pierścień R jest algebrą trójkątną, to $\operatorname{gldim} R < \infty$.

Twierdzenie.

Ciąg dokładny $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ indukuje dla każdego modułu M długie ciągi dokładne
$$\begin{aligned} 0 &\to \operatorname{Hom}_R(Z, M) \to \operatorname{Hom}_R(Y, M) \to \operatorname{Hom}_R(X, M) \\ &\to \operatorname{Ext}^1_R(Z, M) \to \operatorname{Ext}^1_R(Y, M) \to \operatorname{Ext}^1_R(X, M) \to \cdots \end{aligned}$$
i
$$\begin{aligned} 0 &\to \operatorname{Hom}_R(M, X) \to \operatorname{Hom}_R(M, Y) \to \operatorname{Hom}_R(M, Z) \\ &\to \operatorname{Ext}^1_R(M, X) \to \operatorname{Ext}^1_R(M, Y) \to \operatorname{Ext}^1_R(M, Z) \to \cdots \end{aligned}$$

Definicja.

Ciągiem kompozycyjnym modułu M nazywamy każdy ciąg
$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$
podmodułów modułu M taki, że moduł M_i/M_{i-1} jest prosty dla $i = 1, \ldots, n$. W powyższej sytuacji liczbę n nazywamy długością modułu M i oznaczamy $l(M)$.

Uwaga.

Jeśli R jest skończenie wymiarową K-algebrą, to każdy skończenie generowany moduł posiada ciąg kompozycyjny.

§2. Grupa Grothendiecka i forma Eulera

Założenie.

W tym paragrafie zakładamy, że $A = KQ/I$ dla ograniczonego kołczanu skończonego (Q, I) i ciała algebraicznie domkniętego K. Wszystkie rozważane moduły będą skończenie wymiarowe.

Oznaczenia.

Niech $Q_0 = \{1, \dots, n\}$, e_i będzie prymitywnym idempotentem algebry A odpowiadającym wierzchołkowi i, $P(i) := e_i A$, $I(i) := D(Ae_i)$ i $S(i) := \operatorname{top} P(i) = \operatorname{soc} I(i)$, $i \in Q_0$.

Jeśli M modułem, to dla $i \in Q_0$, $l_i(M) := \#\{j \mid M_j/M_{j-1} \simeq S(i)\}$, gdzie

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_m = M$$

jest ciągiem kompozycyjnym.

Definicja.

Wektorem wymiaru modułu M nazywamy

$$\mathbf{dim}\, M = (\dim_K Me_1, \dots, \dim Me_n)^{\mathrm{tr}} \in \mathbb{Z}^n.$$

Wiadomo, że $Me_i \simeq \operatorname{Hom}_A(P(i), M) \simeq D \operatorname{Hom}_A(M, I(i))$ dla $i \in Q_0$.

Lemat.

Jeśli ciąg $0 \to L \to M \to N \to 0$ jest dokładny, to $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{dim}\, L + \mathbf{dim}\, N$.

Definicja.

Grupą Grothendiecka $K_0(A)$ algebry A nazywamy grupę $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$, gdzie $\mathscr{F}$ jest wolną grupą abelową z bazą utworzoną przez klasy izomorfizmu prawych A-modułów, zaś $\mathscr{F}'$ jest podgrupą generowaną przez elementy $\tilde{M} - \tilde{L} - \tilde{N}$ dla wszystkich ciągów dokładnych $0 \to L \to M \to N \to 0$. Warstwę klasy $\tilde{M}$ w grupie $K_0(A)$ oznaczamy $[M]$.

Twierdzenie.

$K_0(A)$ jest wolną grupą abelową z bazą $[S(1)]$, …, $[S(n)]$. Funkcja $\mathbf{dim} : K_0(A) \to \mathbb{Z}$ dana wzorem $\mathbf{dim}[M] := \mathbf{dim}\, M$ jest dobrze określonym izomorfizmem.

Wniosek.

Dla każdego skończenie generowanego A-modułu $l_j(M) = \dim_K Me_j$.

Definicja.

Macierzą Cartana algebry A nazywamy macierz $C_A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ daną wzorem

$$C_A = [c_{j,i}]_{i,j=1,\dots,n}, \qquad c_{i,j} := \dim e_i A e_j.$$

STWIERDZENIE.
$\mathbf{dim}\, P(i) = C_A\, \mathbf{dim}\, S(i)$ i $\mathbf{dim}\, I(i) = C_A^{\mathrm{tr}}\, \mathbf{dim}\, S(i)$ dla $i \in Q_0$.

STWIERDZENIE.
Jeśli $\operatorname{gldim} A < \infty$, to $C_A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, więc $\det C_A \in \{1, -1\}$.

ZAŁOŻENIE.
Będziemy odtąd zakładać, że $\operatorname{gldim} A < \infty$.

DEFINICJA.
$\mathbb{Z}$-dwuliniową formę $\langle -, - \rangle_A : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ daną wzorem $\langle x, y \rangle_A := x\mathrm{tr} C_A^{-\,\mathrm{tr}} y$ nazywamy charakterystyką Eulera algebry A. Forma kwadratowa Eulera $\chi_A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ algebry A dana jest wzorem $\chi_A(x) := \langle x, x \rangle_A$.

STWIERDZENIE.
Dla modułów M i N mamy

$$\langle \mathbf{dim}\, M, \mathbf{dim}\, N \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_k \operatorname{Ext}_A^j(M, N).$$

W szczególności $\chi_A(\mathbf{dim}\, M) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_k \operatorname{Ext}_A^j(M, M)$