O ALGEBRACH KLASTROWYCH

NA PODSTAWIE REFERATU STANISŁAWA KASJANA

§1. Źródła

W 1969 roku Gelfand i Kiryłow pokazali, że jeśli G jest półprostą spójną grupą Liego nad ciałem $\mathbb{C}$, to przestrzeń funkcji regularnych $A := \mathbb{C}[G/N^+]$ na przestrzeni jednorodnej G/N^+ jest $\mathfrak{g}$-modułem izomorficznym z sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych V_λ algebry $\mathfrak{g}$, gdzie $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego grupy G. Powstaje problem jak odnaleźć reprezentacje V_λ w algebrze A, tzn. znaleźć bazę liniową algebry A, która jest sumą baz modułów V_λ. Dodatkowo żądamy, aby znajomość tych baz pozwoliła rozkładać moduły $V_\lambda \otimes V_\mu$. Takie bazy nazywamy kanonicznymi.

Przykład.

Niech $G := \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Wtedy N^+ to macierze górnotrójkątne z jedynkami na przekątnej i każdą macierz $A \in \mathrm{SL}_3$ możemy sprowadzić do postaci dolnotrójkątnej (z dokładnością do permutacji kolumn). Dla permutacji σ niech U_σ oznacza odpowiedni zbiór. Wtedy $G/N^+ = \bigcup_{\sigma\in S_3} U_\sigma$ z odpowiednimi utożsamieniami. Wiadomo, że $A := \mathbb{C}[G/N^+] = \mathbb{C}[G]^{N^+}$. Dla macierzy $M = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{smallmatrix}\right]$ niezmiennikami są z_1, z_2, z_3, $z_{1,2} := \det\left[\begin{smallmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{smallmatrix}\right]$, $z_{1,3}$, $z_{2,3}$.

Lemat.

$\mathbb{C}[G]^{N^+} = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_{1,2}, z_{1,3}, z_{2,3}] = \mathbb{C}[Z_i, Z_{i,j}]/(Z_2 Z_{1,3} - Z_1 Z_{2,3} - Z_3, Z_{1,2})$.

Niech $R := \mathbb{C}[z_1, z_2, z_{1,2}, z_{2,3}]$. Wtedy $A = R[z_2, z_{1,3}]$. Zauważmy, że odpowiednia relacja ma postać $z_2 z_{1,3} \in R$. W szczególności $A \subset R[z_2, z_2^{-1}]$.

§2. Definicja algebry klastrowej

Niech $I := \{1, \dots, n\}$ i niech $\mathbb{T}_n$ będzie regularnym n-drzewem, w którym krawędzie ponumerowane są liczbami 1, …, n w ten sposób, że z każdego wierzchołka wychodzą krawędzie ponumerowane wszystkimi liczbami. Niech $\mathbb{P}$ będzie beztorsyjną grupą abelową (z notacją multiplikatywną).

Definicja.

Wzorcem wymiany (exchange pattern) na drzewie $\mathbb{T}_n$ ze współczynnikami w grupie $\mathbb{P}$ nazywamy układ $\mathscr{M} = (M_j(t))_{t\in\mathbb{T}_n, j\in I}$, taki, że

Data: 07.03.2006 i 14.03.2006.

$M_j(t)$ jest jednomianem od zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ postaci $M_j(t) = p_j(t)x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$, $b_i \geq 0$, $p_j(t) \in \mathbb{P}$, takim, że $x_j \nmid M_j(t)$, jeśli mamy krawędź $t \overset{i}{\text{---}} t'$ oraz $x_i \mid M_j(t)$, to $x_i \nmid M_j(t')$, oraz spełnione są dwa dodatkowe warunki.

Z każdym wierzchołkiem $t \in \mathbb{T}_n$ stowarzyszamy ciąg zmiennych $x_1(t)$, $\ldots, x_n(t)$. Niech $\mathscr{F}(t) := \mathbb{ZP}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Krawędź $t \overset{i}{\text{---}} t'$ wyznacza homomorfizm $\mathscr{R}_{t,t'} : \mathscr{F}(t') \to \mathscr{F}(t)$ dany wzorem $x_j(t') \mapsto x_j(t)$, $j \neq i$, $x_i(t') \mapsto \frac{1}{x_i(t)}(M_i(t)(x(t)) + M_i(t')(x(t)))$. Zauważmy, że $\mathscr{R}_{t,t'} = \mathscr{R}_{t',t}^{-1}$.

Ustalmy wierzchołek $t_0 \in \mathbb{T}_n$. System $(\mathscr{R}_{t,t'})$ wyznacza dla każdego wierzchołka t izomorfizm $\mathscr{R}_t : \mathscr{F}(t) \to \mathscr{F} := \mathscr{F}(t_0)$.

Definicja.

Niech A będzie podpierścieniem w algebrze $\mathbb{ZP}$ zawierającym $p_i(t)$, $t \in \mathbb{T}_n$, $i \in I$. Algebrą klastrową $\mathscr{A} = \mathscr{A}_A(\mathscr{M})$ (rangi n nad algebrą A stowarzyszoną ze wzorcem $\mathscr{M}$) nazywamy najmniejszą A-podalgebrę z 1 algebry $\mathscr{F}$ zawierającą wszystkie elementy $\mathscr{R}_t(x_i(t))$, $i \in I$, $t \in \mathbb{T}_n$.

Przykład.

Dla $n = 2$ i $\mathbb{P} \simeq \mathbb{Z}^5$, $M_1(t_0) := r_0$, $M_2(t_0) := q_1x_1$, $M_1(t) := q_2x_2$, $M_2(t_1) := r_1$, $M_1(t_2) := r_2$, $M_2(t_2) := q_3x_1$, $\ldots$, gdzie $q_1, \ldots, q_5$ są generatorami grupy $\mathbb{P}$ i $r_m := q_{m-2}q_{m+2}$, oraz A będącego podpierścieniem generowanym przez $q_1, \ldots, q_5$ otrzymujemy po kompleksyfikacji pierścień $\mathbb{C}[\mathrm{Gr}(2,5)]$.

Twierdzenie (Fomin–Zelevinsky, Laurant Phenomenon).

Niech $\mathscr{A}$ będzie algebrą klastrową i $(y_1, \ldots, y_n)$ będzie klastrem. Wtedy $\mathscr{A} \subset \mathbb{ZP}[y_1, \ldots, y_n, y_1^{-1}, \ldots, y_n^{-1}]$.

§3. Seeds i znormalizowane algebry klastrowe

Niech $\mathscr{M}$ będzie wzorcem wymiany nad drzewem $\mathbb{T}_n$. Jeśli $t \overset{j}{\text{---}} t'$ jest krawędzią, to $\frac{M_j(t)}{M_j(t')} = \frac{p_j(t)}{p_j(t')}\prod_{i=1}^n x_i^{b_{i,j}(t)}$. Niech $B(t) = B_{\mathscr{M}}(t) = [b_{i,j}(t)]_{i,j=1,\ldots,n}$.

Uwaga.

Wykładniki w jednomianach $M_j(t)$ i $M_j(t')$ można odtworzyć z macierzy $B(t)$, mianowicie $M_j(t) = p_j(t)\prod_{i:b_{i,j}(t)>0} x_i^{b_{i,j}(t)}$ oraz $M_j(t') = p_j(t')\prod_{i:b_{i,j}<0} x_i^{-b_{i,j}(t)}$.

Definicja.

Macierz kwadratową B nazywamy jest antysymetryczna ze względu na znak, jeśli $\operatorname{sgn} b_{i,j} = -\operatorname{sgn} b_{j,i}$.

Definicja.

Mutacją macierzy B w kierunku k nazywamy macierz $B' = \mu_k(B)$ daną wzorem $b'_{i,j} = -b_{i,j}$, gdy $i = k$ lub $j = k$, oraz $b_{i,j} + \frac{|b_{i,k}|b_{k,j} + b_{i,k}|b_{k,j}|}{2}$ w przeciwnym wypadku.

Uwaga.

Jeśli $n = 2$, to $\mu_k B = -B$.

Twierdzenie.

Niech $(B(t))_{t \in \mathbb{T}_n}$ będzie rodziną $n \times n$-macierzy o współczynnikach w pierścieniu $\mathbb{Z}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

(1) istnieje wzorzec wymiany $\mathscr{M}$ na drzewie $\mathbb{T}_n$ taki, że $B(t) = B_{\mathscr{M}}(t)$,

(2) macierz $B(t)$ jest antysymetryczna ze względu na znak dla każdego t oraz jeśli $t \overset{k}{\text{---}} t'$ jest krawędzią, to $B(t') = \mu_k(B(t))$.

Uwaga.

Wybrana macierz $B(t)$ wyznacza wykładniki w całym wzorcu wymiany.

Uproszczona definicja znormalizowanej algebry klastrowej

Załóżmy, że $\mathbb{P} = \{1\}$. Wtedy $\mathscr{F} = \mathbb{Q}(y_1, \dots, y_n)$. Ziarnem nazywamy parę (B, x), gdzie B jest $n \times n$-macierzą antysymetyczną ze względu na znak oraz $x = (x_1, \dots, x_k)$ jest bazą przestępną ciała $\mathscr{F}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Mutacją ziarna $\Sigma = (B, x)$ nazywamy ziarno $\mu_k \Sigma = (\mu_k B, x')$, gdzie $x'_i = x_i$ dla $i \neq k$ oraz $x_i x'_i = \prod_{i: b_{i,k} > 0} x_i^{b_{i,k}} + \prod_{i: b_{i,k} < 0} x_i^{-b_{i,k}}$.

Znormalizowaną algebrą klastrową (określoną przez ziarno (B, x)) nazywamy podpierścień $\mathscr{A}_B$ ciała $\mathscr{F}$ generowany przez wszystkie zmienne pojawiające się we wszystkich iterowanych mutacjach ziarna (B, x). Inaczej, jest to (z dokładnością do izomorfizmu) algebra klastrowa wyznaczona przez wzorzec wymiany stowarzyszony z macierzą B.

Przykład.

Dla $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ otrzymujemy skończenie wiele zmiennych klastrowych. Okazuje się, że każdą zmienną klastrową różną od x_1 i x_2 można zapisać w postaci $\frac{F}{J}$, gdzie F jest wielomianem, $F(0,0) \neq 0$, oraz J jest jednym z jednomianów x_1, x_2, $x_1 x_2$. Możemy też zapisać $x_i = \frac{1}{x_i^{-1}}$, $i = 1, 2$.

§4. Kryterium skończonego typu klastrowego

Niech B będzie macierzą antysymetryczną ze względu na znak.

Definicja.

Mówimy, że algebra $\mathscr{A}_B$ jest skończonego typu klastrowego, jeśli istnieje tylko skończenie wiele zmiennych klastrowych wygenerowanych w procesie mutacji.

Z macierzą B możemy stowarzyszyć macierz $A(B) := [a_{i,j}]$, gdzie $a_{i,j} := 2$, $i = j$, oraz $a_{i,j} := -|b_{i,j}|$, gdy $i \neq j$.

Twierdzenie (Fomin–Zelevinski).

Niech B będzie macierzą antysymteryczną ze względu na znak. Następujące warunki są równoważne:

(1) algebra $\mathscr{A}_B$ jest skończonego typu klastrowego,
(2) $A(B)$ jest macierzą Cartana zredukowanego skończonego systemu pierwiastków,
(3) każda iterowana mutacja B' macierzy B spełnia warunek $|b'_{i,j}b'_{j,i}| \leq 3$.

W powyżej sytuacji istnieje mutacja B_0 macierzy B taka, że $b^0_{i,j}b^0_{i,k} \geq 0$ dla wszystkich i, j i k.

Systemy pierwiastków

Skończonym systemem pierwiastków nazywamy skończony podzbiór $\Delta \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ taki, że jeśli $\alpha, \beta \in \Delta$, to $r_\alpha(\beta) := \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha \in \Delta$, gdzie $\langle \beta, \alpha \rangle = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$, oraz $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$. Mówimy, że system Δ jest zredukowany, gdy z warunku $\alpha, c\alpha \in \Delta$, wynika, że $c = \pm 1$. Zredukowane i skończone systemy pierwiastków są sklasyfikowane za pomocą diagramów Dynkina. Bazą systemu pierwiastków nazywamy liniowo niezależny podzbiór $\Pi \subset \Delta$ taki, ze jeśli $\alpha \in \Delta$, to istnieją n_β, $\beta \in \Pi$, które są tego samego znaku i takie, że $\alpha = \sum_{\beta \in \Pi} n_\beta \beta$. Z definicji $\Delta^+ := \Delta \cap \mathbb{N}\Pi$. Macierz $C = [\langle \beta_i, \beta_j \rangle]$ nazywamy macierzą Cartana systemu Δ.

Twierdzenie (Fomin–Zelevinsky).

Niech B będzie macierzą antysymetryczną taką, że $b_{i,j}b_{i,k} \geq 0$ dla wszystkich i, j i k. Wtedy istnieje bijekcja pomiędzy zmiennymi klastrowymi w algebrze $\mathscr{A}_B$ oraz zbiorem $\Delta^+ \cup -\Pi$, w której pierwiastkowi $\alpha = \sum m_i \beta_i$ odpowiada zmienna postaci $\frac{F}{x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}}$, gdzie $F(0, \ldots, 0) \neq 0$.