

WYMIAR REPREZENTACYJNY ALGEBRY

NA PODSTAWIE REFERATU ZBIGNIEWA LESZCZYŃSKIEGO

DEFINICJA.

Wymiarem reprezentacyjnym $\text{rep. dim } A$ algebry artinowskiej A nazywamy minimum wymiarów globalnych algebr $\text{End}_A(M)$ dla modułów M będących generatorami i kogeneratorami kategorii $\text{mod } A$.

TWIERDZENIE.

$\text{rep. dim } A = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{gl. dim } A = 0$.

TWIERDZENIE (XI).

$\text{rep. dim } A \neq 1$.

Powyższe twierdzenie wynika z poniższego.

TWIERDZENIE.

Jeśli $\text{rep. dim } A \leq 1$, to $\text{gl. dim } A = 0$.

DOWÓD.

Ustalmy generator i kogenerator M kategorii $\text{mod } A$ taki, że $\text{gl. dim } \Gamma \leq 1$, gdzie $\Gamma := \text{End}_A(M)$. Istnieje koprezentacja injektywna

$$0 \rightarrow \Gamma \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow 0$$

taka, że moduł I_1 jest projektywny, co oznacza, że algebra Γ jest samoinjektywna, więc $\text{gl. dim } \Gamma \in \{0, \infty\}$.

STWIERDZENIE (AUSLANDER).

$\text{rep. dim } A = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego.

UWAGA.

- (1) Iyama pokazał, że $\text{rep. dim } A < \infty$.
- (2) Roquier udowodnił, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje algebra A taka, że $\text{rep. dim } A = n$.
- (3) Istnieje wiele klas algebr, dla których wymiar reprezentacyjny jest nie większy niż 3.

LEMAT.

Niech M będzie generatorem i kongeneratorem kategorii $\text{mod } A$ dla algebry artinowskiej A . Następujące warunki są równoważne:

(1) Dla każdego (nierozkładalnego) modułu X istnieje ciąg dokładny

$$0 \rightarrow M_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow X \rightarrow 0,$$

gdzie $M_i \in \text{add } M$, który pozostaje dokładny po zastosowaniu funktora $\text{Hom}_A(M, -)$.

(2) Dla każdego (nierozkładalnego) modułu X istnieje ciąg dokładny

$$0 \rightarrow X \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{n-2} \rightarrow 0.$$

gdzie $M_i \in \text{add } M$, który pozostaje dokładny po zastosowaniu funktora $\text{Hom}_A(-, M)$.

(3) $\text{gl. dim End}_A(M) \leq n$.

WNIOSEK.

$\text{rep. dim } A \leq 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje generator i kogenerator M taki, że dla każdego modułu nierozkładalnego X istnieje ciąg dokładny $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow X$, gdzie $M_0, M_1 \in \text{add } M$, który pozostaje dokładny po zastosowaniu funktora $\text{Hom}_A(M, -)$.