WYZNACZANIE KROTNOŚCI NIEROZKŁADALNYCH SKŁADNIKÓW PROSTYCH W ROZKŁADZIE REPREZENTACJI

NA PODSTAWIE REFERATU ANDRZEJA MROZA

§1. Motywacja

Niech A będzie algebrą. Badanie kategorii $\operatorname{mod} A$ można podzielić na następujące etapy:

(1) określenie typu reprezentacyjnego,
(2) klasyfikacja reprezentacji nierozkładalnych + opis struktury kołczanu Auslander–Reiten,
(3) opis pełnej listy parami nieizomorficznych reprezentacji reprezentacji nierozkładalnych w „postaci kanonicznej” (algebry specjalne biseryjne, algebry kanoniczne (typu Euklidesa)),
(4) metoda rozkładu reprezentacji na sumę prostą podreprezentacji nierozkładalnych (lub znalezienie wektora krotności).

Referat dotyczyć będzie czwartego z powyższych problemów. W rozwiązaniu wykorzystywane będą następujące idee:

(1) funktorialne podejście do ciągów Auslandera–Reiten + macierz Auslander–Reiten, które pozwolą zredukować problem szukania krotności do liczenia wymiarów pewnych przestrzeni homomorfizmów,
(2) dla algebr kanonicznych − kryterium.

Będziemy też badać złożoność obliczeniową otrzymanego algorytmu. Najbardziej naturalny algorytm ma złożoność m^7, ale dla algebr typu $\widetilde{\mathbb{A}}_{p,q}$ można go poprawić i otrzymać złożoność m^4.

§2. Algebra macierzy nieskończonych

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1. Dla zbiorów $\mathscr{X}$ i $\mathscr{Y}$ niech $M_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}(R) := \{f : \mathscr{X}\times\mathscr{Y} \to R\}$. Jeśli $M \in M_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}(R)$ i $N \in M_{\mathscr{Y}\times\mathscr{Z}}(R)$ oraz dla dowolnych $x\mathscr{X}$ i $z \in \mathscr{Z}$ zbiór $\{y \in \mathscr{Y} \mid M_{x,y}N_{y,z} \neq 0\}$ jest skończony, to możemy zdefiniować iloczyn MN.

Stwierdzenie.

$M_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}}(R)$ jest częściową R-algebrą z jedynką.

(1) Mnożenie w algebrze $M_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}}(R)$ nie musi być łączne.
(2) W algebrze $M_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}}(R)$ mogą wystąpić odwracalne dzielniki zera.
(3) Element algebry $M_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}}(R)$ może mieć wiele odwrotności.

Data: 20.04.2006.

Uwaga.

Dowolna macierz $M \in M_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}}(R)$ indukuje odwzorowanie R-liniowe $M : R^{(\mathscr{X})} \to R^{\mathscr{X}}$. Jeśli ponadto w macierzy M w każdym wierszu (kolumnie) jest skończenie wiele elementów różnych od 0, to macierz M indukuje odwzorowanie $R^{\mathscr{X}} \to \mathscr{R}^{\mathscr{X}}$ ($R^{(\mathscr{X})} \to R^{(\mathscr{X})}$, odpowiednio).

§3. Ogólna metoda wyznaczania wektora krotności

Niech Λ będzie skończonie wymiarową łączną algebrą z 1 (spójną i bazową). Niech $\mathscr{X}$ będzie pełną rodziną parami nieizomorficznych Λ-modułów nierozkładalnych. Przez C oznaczać będziemy macierz Cartana kategorii Auslandera algebry Λ, tzn. $C_{X,Y} = [Y,X]$, $X, Y \in \mathscr{X}$.

Dla $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ i $X \in \mathscr{X}$ niech $h_X = h_X(M) := [M,X]$ i $h'_X = h'_X(M) := [X,M]$ oraz $m_X = m_X(M)$ będzie krotnością modułu X jako składnika prostego modułu M.

Lemat.

Dla dowolnego modułu M zachodzą równości: $h = Cm$ i $h' = C^{\mathrm{T}}m$.

Wniosek.

$m = Th$ ($m = T^{\mathrm{T}}h'$) dla każdej lewej (odpowiednio, prawej) odwrotności T macierzy C (o ile istnieje).