MODUŁY ALGEBRAICZNIE ZWARTE

NA PODSTAWIE REFERATU STANISŁAWA KASJANA

§1. PP(=POSITIVE PRIMITIVE)-FORMUŁY.

DEFINICJA.

Niech R będzie ustalonym pierścieniem z jedynką. pp-formułą ze zmiennymi $y_1, \ldots, y_n$ nazywamy każdą formułę $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ postaci

$$\exists\, x_1, \ldots, x_m : \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j = \sum_{t=1}^{n} b_{i,t} y_t,\ i = 1, \ldots, q,$$

gdzie $a_{i,j}, b_{i,t} \in R$. Jeśli M jest lewym R-modułem oraz $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M$, to definiuje się pojęcie spełnialności formuły $\varphi(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ w module M, co zapisujemy $M \models \varphi(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

OZNACZENIA.

Jeśli $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ jest pp-formułą, to

$$\varphi_M = \{(\varphi_1, \ldots, \mu_n) \in M^n \mid M \models \varphi(\mu_1, \ldots, \mu_n)\}.$$

Z drugiej strony, jeśli $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in M^n$, to pp-typem elementu $\boldsymbol{\mu}$ w M nazywamy

$$\mathrm{pp}_M(\boldsymbol{\mu}) = \{\varphi \mid M \models \varphi(\boldsymbol{\mu})\}.$$

LEMAT.

Zbiór φ_M jest $\mathrm{End}_R(M)$-$Z(R)$-podbimodułem bimodułu M^n, gdzie przez $Z(R)$ oznaczamy centrum pierścienia R.

§2. PODMODUŁY I CIĄGI SERWANTNE.

UWAGA.

Jeśli $f : M \to N$ jest homomorfizmem modułów oraz $\boldsymbol{\mu} \in M^n$, to $\mathrm{pp}_M(\boldsymbol{\mu}) \subset \mathrm{pp}_N(f(\boldsymbol{\mu}))$, gdzie $f(\boldsymbol{\mu}) := (f(\mu_1), \ldots, f(\mu_n)) \in N^n$.

DEFINICJA.

Podmoduł M modułu N nazywamy serwantnym, jeśli dla dowolnego $\boldsymbol{\mu} \in M^n$ zachodzi równość $\mathrm{pp}_M(\boldsymbol{\mu}) = \mathrm{pp}_N(\boldsymbol{\mu})$. Równoważnie, podmoduł M jest serwantny, jeśli układ równań

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j = m_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

Data: 19.10.2006.

taki, że $m_i \in M$, $i = 1, \dots, n$, ma rozwiązanie w module N wtedy i tylko wtedy, gdy ma też rozwiązanie w module M. Ciąg dokładny

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

nazywamy serwantnym, jeśli moduł M' jest serwantnym podmodułem modułu M.

Przykład.

(1) Włożenie $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Z}_4$ nie jest serwantne.
(2) Włożenie $M \hookrightarrow M \oplus N$ jest serwantne.
(3) Jeśli $p \in \mathbb{Z}$ jest liczbą pierwszą, to włożenie $\mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \hat{\mathbb{Z}}_{(p)}$ jest serwantne.

Twierdzenie.

Dla ciągu dokładnego

$$\eta : 0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

R-modułów następujące warunki są równoważne:

(a) Ciąg η jest serwantny.
(b) Dla dowolnych homomorfizmów $\rho : R^m \to R^n$, $f' : R^m \to M'$ oraz $f : R^n \to M$ takich, że $f\rho = uf'$, istnieje istnieje homomorfizm $h : R^n \to M'$ taki, że $h\rho = f'$.
(c) Dla dowolnego skończenie przedstawialnego lewego R-modułu E ciąg $\mathrm{Hom}(E, \eta)$ jest dokładny.
(d) Dla dowolnego skończenie przedstawialnego prawego R-modułu F ciąg $F \otimes_R \eta$ jest dokładny.
(e) Dla dowolnego R-modułu F ciąg $F \otimes_R \eta$ jest dokładny.
(f) Ciąg R-modułów $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\eta, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ jest dokładny i rozszczepialny.
(g) Ciąg η jest granicą prostą systemu ciągów rozszczepialnych.

Definicja.

Moduł E nazywamy skończenie przedstawialnym, jeśli istnieje ciąg dokładny postaci

$$R^m \to R^n \to E \to 0.$$

Dowód.

(a) $\Longrightarrow$ (b): Niech

$$\rho(e_i) = \rho_{i,1}e_1 + \cdots + \rho_{i,n}e_n, \ i = 1, \dots, m.$$

Równość $f\rho = uf'$ oznacza, że

$$f'(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j} f(e_j), \ i = 1, \dots, m,$$

zatem układ równań

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j} x_j = f'(e_i),\ i = 1, \dots, m,$$

ma rozwiązanie w module M, zatem ma też rozwiązanie $\mu_1, \dots, \mu_n$ w module M'. Definiujemy $h(e_j) = \mu_j$, $j = 1, \dots, n$.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Ustalmy homomorfizm $g : E \to M''$. Z założenia istnieje ciąg dokładny

$$R^m \xrightarrow{\rho} R^n \xrightarrow{\pi} E \to 0.$$

Istnieją homomorfizmy $f : R^n \to M$ oraz $f' : R^m \to M'$ takie, że $f\rho = uf'$ oraz $g\pi = pf$. Z założenia istnieje homomorfizm $h : R^n \to M'$ taki, że $h\rho = f'$. Wtedy $(f - uh)\rho = 0$, więc istnieje od homomorfizm $h' : E \to M$ taki, że $f = uh + h'\pi$. Wtedy $ph'\pi = g\pi$, skąd $ph' = g$, co kończy dowód.

(c) $\Longrightarrow$ (d): Mamy ciąg dokładny

$$R^n \xrightarrow{\rho} R^m \to F \to 0.$$

Homomorfizm ρ możemy utożsamić z macierzą $\rho \in \mathbb{M}_{m,n}(R)$. Wtedy otrzymujemy ciąg dokładny lewych R-modułów

$$R^m \xrightarrow{\rho^{\mathrm{tr}}} R^n \to E \to 0.$$

Dla każdego lewego R-modułu N mamy ciąg dokładny

$$0 \to \mathrm{Hom}(E, N) \to \mathrm{Hom}(R^n, N) \to \mathrm{Hom}(R^m, N).$$

Ponieważ $\mathrm{Hom}(R^n, N) \simeq N^n \simeq R^n \otimes N$ oraz $\mathrm{Hom}(R^n, N) \simeq N^n \simeq R^n \otimes N$, więc dostajemy ciąg dokładny

$$0 \to \mathrm{Hom}(E, N) \to N^n \to N^m \to F \otimes N \to 0.$$

Stosując powyższą obserwację kolejno do modułów M', M i M'' oraz wykorzystując lemat o wężu, otrzymujemy ciąg dokładny

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}(E, M') \to \mathrm{Hom}(E, M) \to \mathrm{Hom}(E, M'') \to& \\ F \otimes M' \to F \otimes M \to F \otimes M'' \to 0&, \end{aligned}$$

co wobec założeń kończy dowód.

Uwaga.

Jeśli ciąg

$$\eta : 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

jest dokładny i moduł M'' jest skończenie przedstawialny, to ciąg η jest serwantny wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozszczepialny.

§3. Moduły serwantnie injektywne = algebraicznie zwarte.

Uwaga.

Przypomnijmy, że moduł Q jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg dokładny postaci

$$0 \to Q \to M \to M'' \to 0$$

jest rozszczepialny, lub równoważnie dla każdego ciągu dokładnego

$$\eta : 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

ciąg $\mathrm{Hom}(\eta, Q)$ jest dokładny.

Definicja.

R-moduł E jest serwantnie injektywny, jeśli dla dowolnego serwantnego ciąg dokładnego η ciąg $\mathrm{Hom}(\eta, E)$ jest dokładny.

Twierdzenie.

Jeśli E jest lewym R-modułem, to następujące warunki są równoważne.

(a) Moduł E jest serwantnie injektywny.

(b) Każde serwantne włożenie $E \to M$ jest rozszczepialne.

(c) Dowolny układ równań

$$\sum_{j\in J} x_j = b_i,\ i \in I,$$

gdzie $b_i \in E$, $a_{i,j} \in R$ są takie, że dla każdego $i \in I$ $a_{i,j} = 0$ dla prawie wszystkich $j \in J$, który jest skończenie rozwiązalny w module E, jest rozwiązalny w module E.

(d) Dowolna (indeksowana zbiorem liniowo uporządkowanym) zstępująca rodzina niepustych zbiorów postaci $\varphi_E + m$, gdzie φ jest pp-formułą jednej zmiennej oraz $m \in M$ ma niepusty przekrój.

(e) Jeśli $\mathbf{n} \in N^n$, $\mathbf{m} \in E^n$, oraz $\mathrm{pp}_N(\mathbf{m}) \subset \mathrm{pp}_E(\mathbf{m})$, to istnieje homomorfizm $f : N \to E$ taki, że $f(\mathbf{n}) = \mathbf{m}$.

Dowód.

(c) $\implies$ (b): Przypuśćmy, że $E \hookrightarrow M$ jest serwantnym włożeniem. Ustalmy generatory m_j, $j \in J$, modułu M. Wypisujemy wszystkie równania postaci

$$\sum_{j\in J} \rho_{i,j} m_j = m'_i \in E,\ i \in I.$$

Układ równań

$$\sum_{j\in J} \rho_{i,j} x_j = m'_i \in E,\ i \in I.$$

jest rozwiązalny w module M, jest więc także skończenie rozwiązalny w module M. Z serwantności podmodułu E wynika, że ten układ równań jest skończenie rozwiązalny w module E, a co za tym idzie jest rozwiązalny w module E. Niech μ_j, $j \in J$, będą rozwiązaniami tego układu w module E. Wtedy istnieje homomorfizm $p : M \to E$ taki, że $p(m_j) = \mu_j$, który rozszczepia włożenie $E \hookrightarrow M$.

§4. Użyteczne fakty.

Definicja.
Moduł M nazywamy liniowo zwartym, jeśli dowolna (indeksowana zbiorem liniowo uporządkowanym) zstępująca rodzina niepustych zbiorów postaci $N + m$, gdzie N jest podmodułem modułu M oraz $m \in M$ ma niepusty przekrój.

Fakt.
Jeśli moduł M jest liniowo zwartym $\mathrm{End}_R(M)$-modułem, to jest algebraicznie zwartym R-modułem. W szczególności, jeśli moduł M jest artinowskim $\mathrm{End}_R(M)$-modułem, to jest algebraicznie zwartym R-modułem.

Fakt.
Jeśli R jest algebrą nad ciałem K oraz M jest prawym R-modułem, to moduł $DM = \mathrm{Hom}_K(M, K)$ jest algebraicznie zwarty.

Fakt.
Każdy moduł skończenie przedstawialny jest algebraicznie zwarty.

Literatura.

[1] Ch. U. Jensen and H. Lenzing, *Model-theoretic Algebra with Particular Emphasis on Fields, Rings, Modules*, Algebra, Logic and Applications, vol. 2, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1989.

[2] M. Prest, *Model Theory and Modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 130, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.