SUPERROZKŁADALNE MODUŁY ALGEBRAICZNIE ZWARTE

NA PODSTAWIE REFERATU STANISŁAWA KASJANA

§1. Moduły nad algebrą Kroneckera.

Oznaczenia.

Niech R będzie algebrą Kroneckera.

Definicja.

Dla każdego $\lambda \in K \cup \{\infty\}$ niech $M_\infty(\lambda) = \varinjlim M_n(\lambda)$ (moduł Prüfer) oraz $\hat{M}(\lambda) = \varprojlim M_n(\lambda)$ (moduł adyczny). Moduły te są serwantnie injektywne i nierozkładalne.

Twierdzenie.

Jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, to każdy serwantnie injektywny R-moduł nierozkładalny jest skończenie wymiarowy, Prüfera, adyczny, lub generyczny.

Twierdzenie.

Każdy serwantnie injektywny R-moduł jest serwantnie injektywną powłoką sumy prostej nierozkładalnych modułów serwantnie injektywnych.

Uwaga.

Dla każdego modułu M istnieje serwantne włożenie w moduł serwantnie injektywny $A(M)$ takie, że dowolne odwzorowanie $f : A(M) \to X$ jest serwantnym monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_M$ jest serwantnym monomorfizmem. Moduł $A(M)$ nazywamy serwantnie injektywną powłoką modułu M.

Wniosek.

Nie istnieje superrozkładalny (nie mający nierozkładalnych składników prostych) moduł serwantnie injektywny nad algebrą Kroneckera.

§2. Superrozkładalne serwantnie injektywne moduły nad dzikimi algebrami dziedzicznymi.

Lemat.

Niech X będzie nierozkładalnym modułem injektwnym nad pierścieniem R. Wtedy dowolne dwa niezerowe podmoduły modułu E mają niezerowy przekrój.

Data: 16.11.2006.

Dowód.

Niech M_1 i M_2 będą niezerowymi podmodułami modułu E takimi, że $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. Wtedy mamy monomorfizm $E(M_1) \oplus E(M_2) \to E$, co prowadzi do sprzeczności z założenie nierozkładalności modułu E.

Fakt.

Niech $R = k\langle X, Y\rangle$ oraz $E = E(R)$. Wtedy E jest superrozkładalnym modułem serwantnie injektywnym.

Dowód.

Oczywiście moduł E jest serwantnie injektywny (gdyż jest injektywny). Pokażemy, że moduł E nie ma nierozkładalnych składników prostych. Załóżmy, że M jest takim składnikiem prostym i niech $r \in R \cap M$. Wtedy $RXr \cap RYr = 0$ oraz $RXr, RYr \neq 0$, co prowadzi do sprzeczności z poprzednim lematem.

Fakt.

Moduł $\begin{tikzcd} E & E \arrow[l, bend right, "Y"'] \arrow[l, "\mathrm{Id}"'] \arrow[l, bend left, "X"] \end{tikzcd}$ jest superrozkładalny i serwantnie injektywny.

Uwaga.

Funktor $\mathrm{MOD}(k\langle X, Y\rangle) \to \mathrm{MOD}(k(\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right] \arrow[l] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd})), V \mapsto \begin{tikzcd} V & V \arrow[l, bend right, "Y"'] \arrow[l, "\mathrm{Id}"'] \arrow[l, bend left, "X"] \end{tikzcd}$, jest pełny wierny i zachowuje serwantną injektywność.

Uwaga.

Istnieją superozkładalne moduły nad algebrą Kroneckera.

Twierdzenie (Ringel).

Istnieje pełny i wierny funktor

$$\mathrm{MOD}(k(\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right] \arrow[l] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd})) \to \mathrm{MOD}(k(\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd})).$$

§3. Superrozkładalne serwantnie injektywne moduły nad niedomową algebrą sznurkową.

Oznaczenia.

Niech $\Lambda = k(\alpha * \beta)/(\alpha\beta, \beta\alpha, \alpha^2, \beta^3)$.

Twierdzenie.

Istnieje superrozkładalny serwantnie injektywny Λ-moduł.

Niech B będzie stringiem o końcu 0, oraz z_0 odpowiednim elementem bazowym w module $M(B)$. Wtedy możemy określi pp-formułę $\varphi_M(z_0)$, która generuje pp-typ elementu z_0 w module M.

Typem (1 zmiennej z) nazywamy zbiór formuł jednej zmiennej wolnej z, który jest niesprzeczny, zamknięty na konsekwencje logiczne i maksymalny ze względu na te własności.

pp-typem nazywamy zbiór pp-formuł, które należą do pewnego typu.

Uwaga.

Niech $\mathbf{p}$ będzie pp-typem jednej zmiennej. Istnieje moduł serwantnie injektywny. Istnijee moudł serwantnie injektywny $N(\mathbf{p})$ oraz element $a \in N(\mathbf{p})$ taki, że $\mathrm{pp}_{N(\mathbf{p})}(a) = \mathbf{p}$ oraz $N(\mathbf{p})$ jest minimalnym modułem o tej własności, tzn. jeśli M jest serwantnie injektywnym modułem, $b \in N$ oraz $\mathrm{pp}_M(b) = \mathbf{p}$, to istnieje serwantne włożenie $N(\mathbf{p}) \to M$ takie, że $a \mapsto b$.

§4. Superozkładalny Λ-moduł.będzie okreśłony jako $M(\mathbf{p})$ dla pewnego typu $\mathbf{p}$.

Superozkładalność wyraża się w terminach własności kratowych typu $\mathbf{p}$.

Fakt.

Jeśli $a \in M$, $b \in N$ i N jest serwantnie injektywny. Jeśli $\mathrm{pp}_M(a) \subset \mathrm{pp}_N(b)$. Wtedy istnieje homomorfizm $f : M \to N$ taki, że $f(a) = b$.

Fakt.

Moduł $N(\mathbf{p})$ jest superrozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{p}$ nie ma dużych formuł.

Trzeba skonstruować pp-typ bez dużych formuł.

Twierdzenie (Ziegler).

Jeżeli w kracie $\mathscr{L}$ wszystkich pp-formuł istnieją dwa podzbiory L_1 i L_2 liniowo uporządkowane w sposób gęsty z elementami najmniejszymi i największymi oraz $L_1 \otimes L_2 \to \mathscr{L}$, to istnieje typ bez dużych formuł. (o ile ciało k jest przeliczalne).

Niech $B = \alpha\beta^{-1}$ oraz $C = \alpha\beta^{-2}$.

Literatura.

[1] G. Puninski, *Superdecomposable pure-injective modules exist over some string algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 7, 1891–1898 (electronic).