ALGEBRY KLASTROWE ORAZ WIELOMIANY HALLA

NA PODSTAWIE REFERATU JUSTYNY KOSAKOWSKIEJ

Oznaczenia.

Przez cały referat n jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią oraz $\mathscr{F} := \mathbb{Q}(u_1, \ldots, u_n)$, gdzie $\mathbf{u} := (u_1, \ldots, u_n)$ jest bazą przestępną ciała $\mathscr{F}$.

§1. Algebry klastrowe.

Definicja.

Ziarnem nazywamy parę $(\mathbf{x}, B)$, gdzie $\mathbf{x}$ jest bazą przestępną ciała $\mathscr{F}$, zaś B jest macierzą kwadratową antysymetryczną (tzn. $b_{i,j}b_{j,i} \leq 0$ dla wszystkich i, j) indeksowaną elementami zbioru $\mathbf{x}$.

Definicja.

Jeśli $(\mathbf{x}, B)$ jest ziarnem oraz $w \in \mathbf{x}$, to mutacją ziarna $(\mathbf{x}, B)$ w kierunku zmiennej w nazywamy ziarno $(\mathbf{x}', B')$, gdzie

$$\mathbf{x}' := \mathbf{x} \setminus \{w\} \cup \{w'\}$$

dla

$$w' = \tfrac{1}{w}(\textstyle\prod_{b_{y,w}>0} y^{b_{y,w}} + \prod_{b_{y,w}<0} y^{-b_{y,w}})$$

oraz

$$b_{y,z} = \begin{cases} -b_{y,z} & y = w \vee z = w \\ b_{y,z} + \frac{1}{2}(|b_{y,w}|b_{w,z} + b_{yw}|b_{w,z}|) & \end{cases}$$

Uwaga.

Jeśli ziarno $(\mathbf{x}', B')$ jest mutacją ziarna $(\mathbf{x}, B)$ w kierunku zmiennej w przez wymianę na zmienną w', to ziarno $(\mathbf{x}, B)$ jest mutacją ziarna $(\mathbf{x}', B')$ w kierunku zmiennej w'.

Definicja.

Mówimy, ze ziarna $(\mathbf{x}, B)$ i $(\mathbf{x}', B')$ są równoważne, jeśli istnieje ciąg mutacji ziarna $(\mathbf{x}, B)$ prowadzący do ziarna $(\mathbf{x}', B')$.

Definicja.

Ustalmy macierz znakiem antysymetryczną B. Zbiór $\mathbf{x}$ nazywamy klastrem, jeśli istnieje macierz znakiem antysymetryczna B' taka, że ziarna $(\mathbf{x}, B')$ i $(\mathbf{u}, B)$ są równoważne.

Definicja.

Ustalmy macierz znakiem antysymetryczną B. Element $w \in \mathscr{F}$ nazywamy zmienną klastrową, jeśli istnieje klaster $\mathbf{x}$ taki, że $w \in \mathbf{x}$.

Data: 09.01.2007.

Definicja.

Ustalmy macierz znakiem antysymetryczną B. (Znormalizowaną) algebrą klastrową (wyznaczoną przez macierz B) nazywamy $\mathbb{Q}$-podalgebrę ciała $\mathscr{F}$ generowaną przez wszystkie zmienne klastrowe. Algebrę klastrową wyznaczoną przez macierz B oznaczamy $\mathscr{A}(B)$.

Twierdzenie (Fomin–Zelevinsky, Laurent phenomoena).

Jeśli B jest znakiem antysymetryczną macierzą, to algebra $\mathscr{A}(B)$ jest podalgebrą algebry $\mathbb{Q}[u_i^{\pm 1} \mid i \in [1,n]]$.

Definicja.

Mówmy, że algebra klastrowa jest skończonego typu klastrowego, jeśli posiada ona jedynie skończenie wiele zmiennych klastrowych.

Oznaczenia.

Jeśli B jest macierzą znakiem antysymetryczną, to $\overline{B} := (a_{i,j})$, gdzie

$$a_{i,j} := \begin{cases} 2 & i = j, \\ -|b_{i,j}| & i \neq j. \end{cases}$$

Twierdzenie (Fomin–Zelevinsky).

Algebra klastrowa jest skończonego typu klastrowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje klaster $(\mathbf{x}, B)$ dla którego macierz $\overline{B}$ jest macierz Cartana skończonego typu.

§2. Diagramy Dynkina oraz algebry klastrowe skończonego typu.

Twierdzenie (Fomin–Zelevinsky).

Istnieje bijekcja pomiędzy algebrami klastrowymi skończonego typu i diagramami Dynkina.

Założenie.

Będziemy odtąd zakładać, że wszystkie rozważane diagramy są diagramami bez waluacji.

Oznaczenia.

Jeśli Q jest kołczanem o n wierzchołkach, $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^n$ oraz $M \in \operatorname{rep}_k(Q)$, to

$$\operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M)_k := \{N \in \operatorname{rep}_k(Q) \mid N \subset M \wedge \mathbf{dim}\, N = \mathbf{e}\}.$$

Lemat.

Jeśli X jest $\mathbb{Z}$-schematem oraz istnieje $P \in \mathbb{Z}[T]$ taki, że

$$P(q) = |X_{\mathbb{F}(q)}|$$

dla nieskończenie wielu q, to $\chi(X_{\mathbb{C}}) = P(1)$.

Oznaczenia.

Jeśli Δ jest diagramem Dynkina, to przez Φ^+ oznaczamy stowarzyszony zbiór pierwiastków dodatnich. Dla kołczanu Q typu Δ oraz

$\alpha \in \Phi^+$ przez $M(\alpha)$ oznaczamy jedyną (z dokładnością do izomorfizmu) nierozkładalną reprezentację kołczanu Q o wektorze wymiaru α. Jeśli $a : \Phi^+ \to \mathbb{N}$, to $M(a) := \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} M(\alpha)^{a(\alpha)}$.

Twierdzenie (Ringel).

Jeśli Q jest kołczanem Dynkina, to dla dowolnych $a_1, a_2, a : \Phi^+ \to \mathbb{N}$ istnieje $\varphi^a_{a_1,a_2} \in \mathbb{Z}[T]$ taki, że

$$\varphi^a_{a_1,a_2}(q) = |\{U \subset M(a) \mid U \simeq M(a_2) \wedge M(x)/U \simeq M(a_1)\}|$$

dla ciała $\mathbb{F}_q$.

Wniosek.

Jeśli Q jest kołczanem Dynkina o n wierzchołkach, to dla dowolnych $a : \Phi^+ \to \mathbb{N}$ oraz $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^n$ istnieje $\varphi_{\mathbf{e},a} \in \mathbb{Z}[T]$ taki, że

$$\varphi_{\mathbf{e},a} = |\operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M)_{\mathbb{F}_q}|.$$

§3. Główne twierdzenie.

Oznaczenia.

Dla $M \in \operatorname{rep}(Q)$ takiego, że $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{m}$, definiujemy

$$X_M := \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^n} \chi(\operatorname{Gr}_{\mathbf{e}}(M)_{\mathbb{C}}) \prod_i u_i^{-\langle \mathbf{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \mathbf{m} - \mathbf{e} \rangle},$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są prostymi pierwiastkami oraz $\langle -, - \rangle$ jest formą Eulera. Przez E_Q będziemy oznaczać $\mathbb{Q}[u_1, \ldots, u_n]$-podmoduł ciała $\mathscr{F}$ generowany przez X_M, $M \in \operatorname{rep}_k(Q)$.

Oznaczenia.

Dla kołczanu Dynkina Q definiujemy macierz $B_Q = (b_{i,j})$ wzorami:

$$b_{i,j} := \begin{cases} 1 & i \to j, \\ -1 & j \to i, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Twierdzenie (Calderon–Chapoton).

Dla kołczanu Q typu Dynkina mamy $E_Q = \mathscr{A}(B_Q)$. Ponadto zmiennymi klastrowymi w algebrze E_Q są $u_1, \ldots, u_n$, oraz X_M, $M \in \operatorname{ind}(Q)$.