ALGEBRY LIEGO STOWARZYSZONE Z FORMAMI KWADRATOWYMI

NA PODSTAWIE REFERATU JUSTYNY KOSAKOWSKIEJ

Oznaczenia.

Dla wierzchołków i oraz j diagramu Δ bez zorientowanych cykli definiujemy

$$c_{i,j} := \begin{cases} 2 & i = j, \\ -|\{\text{krawędzie w grafie } \Delta \text{ łączące wierzchołki } i \text{ i } j\}| & i \neq j. \end{cases}$$

Oznaczenia.

Dla diagramu Dynkina Δ oznaczamy przez $\mathfrak{g}_\Delta$ algebrę Liego generowaną przez elementy x_i $(i \in \Delta_0)$, h_i $(i \in \Delta)$, y_i $(i \in \Delta_0)$ spełniające następujące relacje:

- $[h_i, h_j] = 0$ dla wszystkich $i, j \in \Delta_0$,
- $[x_i, y_j] = \delta_{i,j} h_i$ dla wszystkich $i, j \in \Delta_0$,
- $[h_i, x_j] = c_{i,j} x_j$ dla wszystkich $i, j \in \Delta_0$,
- $[h_i, y_j] = -c_{i,j} y_j$ dla wszystkich $i, j \in \Delta_0$,
- $[x_i, x_j] = 0$ dla wszystkich $i, j \in \Delta_0$ takich, że $c_{i,j} = 0$,
- $[y_i, y_j] = 0$ dla wszystkich $i, j \in \Delta_0$ takich, że $c_{i,j} = 0$,
- $[x_i, [x_i, x_j]] = 0$ dla wszystkich $i, j \in \Delta_0$ (takich, że $c_{i,j} \neq 0$),
- $[y_i, [y_i, y_j]] = 0$ dla wszystkich $i, j \in \Delta_0$ (takich, że $c_{i,j} \neq 0$).

Oznaczenia.

Dla ustalonego diagramu Dynkina przez $\mathfrak{n}_+$ oznaczamy podalgebrę algebry $\mathfrak{g}_\Delta$ generowaną przez elementy $x_1, \ldots, x_n$.

Oznaczenia.

Dla reprezentacyjnie skierowanej algebry A przez $K(A)$ oznaczać będziemy podprzestrzeń liniową algebry Halla $\mathscr{H}_1(A)$ rozpiętą przez klasy izomorfizmów nierozkładalnych A-modułów. Ponadto dla $i \in (Q_A)_0$ przez u_i będziemy oznaczać klasę izomorfizmu odpowiedniego prostego A-modułu.

Uwaga.

Niech A będzie algebrą reprezentacyjnie skierowaną. Ringel udowodnił, że przestrzeń $K(A)$ jest podalgebrą Liego algebry $\mathscr{H}_1(A)$ generowaną przez elementy u_i, $i \in (Q_A)_0$.

Data: 13.09.2009.

Oznaczenia.

Dla elementów $x_1, \dots, x_n$, $n \geq 3$, algebry Liego definiujemy $[x_1, \dots, x_n]$ indukcyjnie wzorem

$$[x_1, \dots, x_n] := [x_1, [x_2, \dots, x_n]].$$

Oznaczenia (Barot/Kussin/Lenzing).

Dla formy kwadratowej $q : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}$ przez $G(q)$ oznaczać będziemy algebrę Liego generowaną przez elementy f_{+i} $(i \in I)$, f_{-i} $(i \in I)$, h_i $(i \in I)$ spełniające następujące relacje

(1) $[h_i, h_j] = 0$ dla wszystkich $i, j \in I$,

(2) $[h_i, f_{\varepsilon j}] = \varepsilon c_{i,j} f_{\varepsilon j}$ dla wszystkich $i, j \in I$ oraz $\varepsilon \in \{+, -\}$, gdzie $c_{i,j} := q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)$,

(3) $[f_{\varepsilon i}, f_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i$ dla wszystkich $i \in I$ oraz $\varepsilon \in \{+, -\}$,

(4) $[f_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, f_{\varepsilon_t i_t}] = 0$ dla wszystkich $i_1, \dots, i_t \in I$ oraz $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t \in \{+, -\}$ takich, że $q(\sum_{j \in [1,t]} \varepsilon_j e_{i_j}) > 1$.

Przez $G^+(q)$ oznaczamy podalgebrę Liego algebry $G(q)$ generowaną przez elementy f_{+i}, $i \in I$.

Oznaczenia.

Dla formy kwadratowej $q : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}$ definiujemy algebrę $\mathscr{L}(q)$ jako algebrę Liego generowaną przez elementy v_i $(i \in I)$ spełniające relacje $[v_{i_1}, \dots, v_{i_m}]$ dla $i_1, \dots, i_m \in I$ takich, że $q(e_{i_2} + \dots + e_{i_m}) = 1$ oraz $q(e_{i_1} + \dots + e_{i_m}) \neq 1$.

Twierdzenie.

Niech A będzie algebrą reprezentacyjnie skierowana. Wtedy homomorfizm $F : \mathscr{L}(q_A) \to K(A)$ dany wzorem $F(v_i) := u_i$, $i \in (Q_A)_0$, jest izomorfizmem algebr Liego. Ponadto, gdy forma q_A jest nieujmnie określona, to algebry Liego $\mathscr{L}(q_A)$ oraz $G^+(q_A)$ są izomorficzne.

Oznaczenia.

Niech $q : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}$ będzie formą kwadratową dodatnio określoną. Niech

$$\mathbf{r}_1 := \{[v_i, v_j] : i, j \in I \text{ i } q(e_i + e_j) \neq 1\} \cup \{[v_i, [v_i, v_j]] : i, j \in I \text{ i } q(e_i + e_j) = 1\}$$

oraz $\mathbf{r}_2$ będzie zbiorem wszystkich elementów postaci $[v_{i_1}, \dots, v_{i_m}]$ takich, że $i_k \neq i_l$ dla wszystkich $k, l \in [1, m]$, $k \neq l$, $q(e_{i_j} + e_{i_{j+1}}) < 2$ dla wszystkich $j \in [1, m-1]$, $q(e_{i_1} + e_{i_m}) > 2$, oraz $q(e_{i_k} + e_{i_l}) = 2$ dla wszystkich $k, l \in [1, m]$, $1 < |k - l| < m - 1$. Przez $\mathscr{L}'(q)$ oznaczamy iloraz wolnej algebrę generowanej przez elementy v_i $(i \in I)$ przez ideał generowany przez zbiór $\mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2$.

Twierdzenie.

Jeśli forma q jest dodatnio określona, to algebry Liego $\mathscr{L}(q)$ i $\mathscr{L}'(q)$ są izomorficzne.