O UOGÓLNIONYCH CB-DEGENERACJACH

NA PODSTAWIE REFERATU STANISŁAWA KASJANA

Referat przedstawia wyniki uzyskane wspólnie z Adamem Hajdukiem.

Założenie.

Przez cały referat k oznaczać będzie ustalone ciało algebraicznie domknięte.

Oznaczenia.

Dla $d \in \mathbb{N}$ symbolem $\mathrm{alg}_k(d)$ oznaczać będziemy pozdbiór przestrzeni k^{d^3} złożony z punktów, które odpowiadają stałym strukturalnym d-wymiarowych łącznych k-algebr z jedynką. Zbiór $\mathrm{alg}_k(d)$ ma strukturę rozmaitości afinicznej. Dla punktu $c \in \mathrm{alg}_k(d)$ symbolem $A(c)$ oznaczmy algebrę określoną na przestrzeni k^d przy pomocy stałych c. Na rozmaitości $\mathrm{alg}_k(d)$ działa grupa $\mathrm{GL}(d)$ w taki sposób, że $\mathrm{GL}(d) \cdot c = \mathrm{GL}(d) \cdot c'$ dla punktów $c, c' \in \mathrm{alg}_k(d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A(c) \simeq A(c')$.

Definicja.

Algebrę A_0 nazywamy degeneracją algebry A_1, jeśli istnieją liczba $d \in \mathbb{N}$ oraz punkty $c_0, c_1 \in \mathrm{alg}_k(d)$ takie, że $A_0 \simeq A(c_0)$, $A_1 \simeq A(c_1)$ i $c_0 \in \overline{\mathrm{GL}(d) \cdot c_1}$.

Przykład.

Ponieważ

$$k[T]/(T \cdot (T - \lambda)) \simeq \begin{cases} k \times k & \lambda \neq 0, \\ k[T]/(T^2) & \lambda = 0, \end{cases}$$

więc algebra $k[T]/(T^2)$ jest degeneracją algebry $k \times k$.

Definicja.

Algebrę A_0 nazywamy CB-degeneracją algebry A_1, jeśli istnieją rozmaitość afiniczna X, otwarty i gęsty podzbiór $U \subset X$, punkt $x_0 \in X$, algebra A i funkcje regularne $f_1, \ldots, f_r : X \to A$ takie, że

$$A/(f_1(x), \ldots, f_r(x)) \simeq A_1$$

dla każdego punktu $x \in U$ i

$$A/(f_1(x_0), \ldots, f_r(x_0)) \simeq A_0.$$

Twierdzenie (Hajduk).

Jeśli algebra A_0 jest CB-degeneracją algebry A_1, to

Data: 04.03.2010 i 11.03.2010.

(1) $\dim_k A_0 \geq \dim_k A_1$,

(2) jeśli $\dim_k A_0 = \dim_k A_1$, to algebra A_0 jest degeneracją algebry A_1,

(3) istnieje algebra półprosta S taka, że

$$A_0/\operatorname{rad} A_0 \simeq A_1/\operatorname{rad} A_1 \times S.$$

Wniosek.

Algebra $k[T]/(T^2)$ nie jest CB-degeneracją algebry $k \times k$.

Definicja.

Algebrę A_0 nazywamy uogólnioną CB-degeneracją algebry A_1, jeśli istnieją rozmaitość afiniczna X, otwarty i gęsty podzbiór $U \subset X$, punkt $x_0 \in X$ i skończona $k[X]$-algebra $\mathscr{A}$ (tzn. $k[X]$-algebra, która jest skończenie generowana jako $k[X]$-moduł) takie, że $\mathscr{A}^x \simeq A_1$ dla każdego punktu $x \in U$ i $\mathscr{A}^{x_0} \simeq A_0$, gdzie dla punktu $x \in X$ definiujemy

$$\mathscr{A}^x = k[X]/\{f \in k[X] : f(x) = 0\} \otimes_{k[X]} \mathscr{A}.$$

Przykład.

Niech Q będzie kołczanem

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

i

$$\mathscr{A} := k[T]Q/(\alpha\beta^2, \beta^2 - T \cdot \beta).$$

Wtedy

$$\mathscr{A}^x \simeq \begin{cases} kQ' & x \neq 0, \\ kQ/(\beta^2) & x = 0, \end{cases}$$

gdzie Q' jest kołczanem

$$\bullet$$

$$.$$

$$\bullet \longleftarrow \bullet$$

Stąd $kQ/(\beta^2)$ jest uogólnioną CB-degeneracją algebry kQ'. Zauważmy, że $kQ/(\beta^2)$ nie jest ani degeneracją ani CB-degeneracją algebry kQ'.

Twierdzenie.

Jeśli algebra A_0 jest ugólnioną CB-degeneracją algebry A_1 i $\dim_k A_0 = \dim_k A_1$, to algebra A_0 jest degeneracją algebry A_1.

Definicja.

Niech X będzie nieprzywiedlną rozmaitością afiniczną zdefiniowaną nad algebraicznie domkniętym podciałem L ciała k. Punkt $x \in X$ nazywamy L-generycznym, jeśli dla dowolnej funkcji $H \in L[X]$ spełniony jest następujący warunek: $H(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $H(y) = 0$ dla wszystkich punktów $y \in X$.

Uwaga.

Niech X będzie nieprzywiedlną rozmaitością afiniczną zdefiniowaną nad algebraicznie domkniętym podciałem L ciała k.

(1) Grupa $\mathrm{Gal}(k/L)$ działa tranzytywnie na zbiorze punktów L-generycznych w rozmaitości X.
(2) Zbiór punktów generycznych w rozmaitości X jest równy przekrojowi wszystkich niepustych zbiorów otwartych w zbiorze X zdefiniowanych nad ciałem L.
(3) Jeśli V jest podzbiorem konstruktywnym rozmaitości X zdefiniowanym nad ciałem L zawierającym punkt L-generyczny, to zbiór V jest gęsty.

Twierdzenie.

Niech X będzie nieprzywiedlną rozmaitością afiniczną zdefiniowaną nad algebraicznie domkniętym podciałem L ciała k. Jeśli $\operatorname{tr.deg}_L k = \infty$, to istnieje punkt L-generyczne w rozmaitości X.

Dowód.

Ustalmy liczbę $n \in \mathbb{N}$ taką, że $X \subset k^n$. Istnieje L-włożenie ciał $\sigma : L(X) \subset k$. Wtedy punkt $(\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n))$ jest punktem L-generycznym w rozmaitości X. $\square$

Przykład.

Niech $\mathscr{A} := k[T, S]/(T \cdot S - 1)$. Wtedy algebra $\mathscr{A}$ nie jest skończenie generowanym $k[T]$-modułem, ale $\dim_k \mathscr{A}^x \leq 1$ dla każdego punktu $x \in k$. Zauważmy także, że algebra $\mathscr{A}_T$ jest skończenie generowanym $k[T, T^{-1}]$-modułem.

Lemat.

Niech I będzie ideałem w algebrze $k\langle T_1, \ldots, T_s\rangle$ oraz $d \in \mathbb{N}$. Jeśli $\dim_k(A/I) \leq d$, to modulo I każdy jednomian stopnia d jest kombinacją liniową jednomianów stopni mniejszych niż d.

Lemat.

Niech Y będzie nieprzywiedlną rozmaitością afiniczną oraz $A : Y \to \mathbb{M}_{m\times n}(k)$ i $b : Y \to k^m$ funkcjami regulalnymi. Jeśli istnieje podzbiór gęsty D taki, że dla każdego punktu $y \in D$ istnieje wektor $x \in k^n$ taki, że $A(y) \cdot x = b(y)$, to istnieją otwarty i gęsty podzbiór $V \subset Y$ i funkcja regularna $x : V \to k^n$ takie, że $A(y) \cdot x(y) = b(y)$ dla każdego punktu $y \in V$.

Twierdzenie.

Niech X będzie nieprzywiedną rozmaitością afiniczną i $\mathscr{A}$ będzie skończenie przedstawialną $k[X]$-algebrą. Załóżmy, że ciało k ma nieskończony stopień transcendencji nad swoim podciałem prostym k_0. Jeśli istnieją liczba $d \in \mathbb{N}$ oraz otwarty i gęsty podzbiór $U \subset k$ takie, że

$\dim_k \mathscr{A}^x \leq d$ dla każdego punktu $x \in U$, to istnieje wielomian $h \in k[X]$ taki, że algebra $\mathscr{A}_h$ jest skończenie generowanym $k[X]_h$-modułem.

Dowód.

Niech

$$\mathscr{A} = k[X]\langle T_1, \ldots, T_s \rangle / (F_1, \ldots, F_r).$$

Istnieje podciało algebraicznie domknięte L ciała k takie, że zbiory X, U i wielomiany F_1, $\ldots$, F_r są zdefiniowane nad ciałem L oraz $\operatorname{tr.deg}_{k_0} L < \infty$. Zauważmy, że wtedy $\operatorname{tr.deg}_L k = \infty$. W szczególności, istnieje punkt L-generyczny x w rozmaitości X. Zauważmy, że $x \in U$.

Dla liczby $m \in \mathbb{N}$ niech M_m oznacza zbiór jednomianów stopnia m w algebrze $k\langle T_1, \ldots, T_s \rangle$. Podobnie definiujemy zbiory $M_{\leq m}$ i $M_{<m}$. Dla liczby $m \in \mathbb{N}$ definiujemy zbiór V_m jako zbiór wszystkich punktów $y \in k$, dla których dla każdego jednomianu $\tau \in M_d$ istnieją skalary $a_\mu^\tau \in k$, $\mu \in M_{<d}$, i $b_{j,\nu,\nu'}^\tau \in k$, $j \in [1, r]$, $\nu, \nu' \in M_{\leq m}$, takie, że

$$\tau = \sum_{\mu \in M_{<d}} a_\mu^\tau \cdot \mu + \sum_{j \in [1,r]} \sum_{\nu, \nu' \in M_{\leq m}} b_{j,\nu,\nu'}^\tau \cdot \nu \cdot F_j(y) \cdot \nu'.$$

Zauważmy, że $U \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$, zatem istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że $x \in V_m$. Wtedy zbiór V_m jest gęsty w rozmaitości U, zatem istnieją funkcja $h \in L[X]$ oraz funkcje regularne $a_\mu^\tau \in k[V]$, $\mu \in M_{<d}$, $\tau \in M_d$, i $b_{j,\nu,\nu'}^\tau \in k[V]$, $j \in [1, r]$, $\nu, \nu' \in M_{\leq m}$, $\tau \in M_d$, takie, że

$$\tau = \sum_{\mu \in M_{<d}} a_\mu^\tau \cdot \mu + \sum_{j \in [1,r]} \sum_{\nu, \nu' \in M_{\leq m}} b_{j,\nu,\nu'}^\tau \cdot \nu \cdot F_j(y) \cdot \nu'$$

dla każdego punktu $y \in V$, gdzie $V := \{x \in X : h(x) \neq 0\}$. Wtedy algebra $\mathscr{A}_h$ jest skończenie generowanym $k[X]_h$-modułem, co kończy dowód.