RÓWNANIA DOMKNIĘĆ ORBIT KOWYMIARU JEDEN

NA PODSTAWIE REFERATU NGUYEN QUANG LOCA

ZAŁOŻENIE.

Przez cały referat k oznaczać będzie ustalone ciało algebraicznie domknięte.

TWIERDZENIE.

Załóżmy, że $\operatorname{char} k = 0$.

Niech $N \in \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})$ dla kołczanu Q i wektora wymiaru $\mathbf{d}$. Jeśli ideał $\operatorname{Ann}(N)$ jest dopuszczalny, to rozmaitość $\overline{\mathscr{O}}_N$ jest nieregularną hiperpowierzchnią wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z następujących warunków:

(1) $\operatorname{Ann}(N) = 0$ i $\dim_k \operatorname{Ext}^1_{kQ}(N, N) = 1$.

(2) $\operatorname{Ann}(N) = \langle \gamma^2 \rangle$ dla pętli γ w kołczanie Q takiej, że $d_{s\gamma} = 2$ i $\operatorname{Ext}^1_{kQ/\langle \gamma^2 \rangle}(N, N) = 0$.

(3) $\operatorname{Ann}(N) = \langle \rho \rangle$ dla relacji ρ w kołczanie Q takiej, że $d_{s\rho} = 1 = d_{t\rho}$ i $\operatorname{Ext}^1_{kQ/\langle \rho \rangle}(N, N) = 0$.

UWAGA.

Przy oznaczeniach powyższego twierdzenia wiadomo, że $\mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_N) = (\operatorname{tr} X_\gamma, \det X_\gamma)$ w przypadku (2) i $\mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_N) = (X_\rho)$ w przypadku (3).

§1. Półniezmienniki kołczanów

TWIERDZENIE (DONKIN).

Niech Q będzie kołczanem i $\mathbf{d}$ wektorem wymiaru. Wtedy algebra $k[\operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})]^{\operatorname{GL}(\mathbf{d})}$ jest generowana przez funkcje postaci $\operatorname{tr}(X_\gamma)$ dla cykli zorientowanych γ w kołczanie Q.

Niech Q będzie kołczanem i $\mathbf{d}$ wektorem wymiaru. Wiadomo, że

$$k[\operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})]^{\operatorname{SL}(\mathbf{d})} = \operatorname{SI}(Q, \mathbf{d}) := \bigoplus_{\chi \in X(\operatorname{GL}(\mathbf{d}))} \operatorname{SI}(Q, \mathbf{d})_\chi,$$

gdzie dla charakteru $\chi \in X(\operatorname{GL}(\mathbf{d}))$ definiujemy

$$\operatorname{SI}(Q, \mathbf{d})_\chi := \{f \in k[\operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})] : \\ g * f = \chi(g) \cdot f \text{ dla wszystkich elementów } g \in \operatorname{GL}(\mathbf{d})\}.$$

Data: 08.04.2010 i 15.04.2010.

Mamy epimorfizm $\mathbb{Z}^{Q_0} \to X(\mathrm{GL}(\mathbf{d}))$ dany wzorem

$$\lambda \mapsto (g \mapsto \prod_{i \in Q_0} \det(g_i)^{\lambda_i}).$$

Powyższy epimorfizm jest izomorfizmem, jeśli wektor $\mathbf{d}$ jest wierny. Wiadomo też, że grupę $\mathbb{Z}^{Q_0}$ możemy utożsamiać z grupą $(\mathbb{Z}^{Q_0})^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{Q_0}, \mathbb{Z})$. Zauważmy, że jeśli $\mu \in (\mathbb{Z}^{Q_0})^*$ i $\mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_\mu \neq 0$, to $\mu(\mathbf{d}) = 0$. Wynika to z faktu, że podgrupa grupy $\mathrm{GL}(\mathbf{d})$ złożona z macierzy postaci $(\lambda \cdot \mathrm{Id})$ dla elementów $\lambda \in k^*$ działa trywialnie na przestrzeni $\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})$, a więc także na pierścieniu $k[\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})]$.

Definicja.

Niech Q będzie kołczanem oraz $\mathbf{d}$ i $\mathbf{e}$ wektorami wymiaru takimi, że $\langle \mathbf{e}, \mathbf{d} \rangle = 0$. Dla reprezentacji $V \in \mathrm{rep}_Q(\mathbf{e})$ i $W \in \mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})$ rozważmy odwzorowanie

$$d_W^V : \bigoplus_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}_k(k^{e_i}, k^{d_i}) \to \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}_k(k^{e_{s\alpha}}, k^{d_{t\alpha}})$$

dane wzorem $f \mapsto (f_{t\alpha} V_\alpha - W_\alpha f_{s\alpha})$. Ustalając bazy w przestrzeniach

$$\bigoplus_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}_k(k^{e_i}, k^{d_i}) \qquad \text{i} \qquad \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}_k(k^{e_{s\alpha}}, k^{d_{t\alpha}})$$

definiujemy funkcję regularną $c : \mathrm{rep}_Q(\mathbf{e}) \times \mathrm{rep}_Q(\mathbf{d}) \to k$ wzorem $c(V, W) := \det d_W^V$. Dla ustalonej reprezentacji $V \in \mathrm{rep}_Q(\mathbf{e})$ definiujemy funkcję regularną $c^V \in k[\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})]$ wzorem $c^V := c(V, -)$.

Uwaga.

Jeśli V i W są reprezentacjami kołczanu Q oraz $\langle \mathbf{dim}\, V, \mathbf{dim}\, W \rangle = 0$, to $c(V, W) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Hom}_{kQ}(V, W) \neq 0$.

Lemat (Schofield).

Niech Q będzie kołczanem oraz $\mathbf{d}$ i $\mathbf{e}$ wektorami wymiaru takimi, że $\langle \mathbf{e}, \mathbf{d} \rangle = 0$. Jeśli $V \in \mathrm{rep}_Q(\mathbf{e})$, to $c^V \in \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_{\langle \mathbf{e}, - \rangle}$.

Twierdzenie.

Niech Q będzie kołczanem i $\mathbf{d}$ wektorem wymiaru.

(1) Jeśli $\mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_\chi \neq 0$, to istnieje wektor wymiaru $\mathbf{e}$ taki, że $\chi = \langle \mathbf{e}, - \rangle$.
(2) Jeśli $\mathbf{e}$ jest wektorem wymiaru takim, że $\langle \mathbf{e}, \mathbf{d} \rangle = 0$, to przestrzeń liniowa $\mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_{\langle \mathbf{e}, - \rangle}$ jest rozpięta przez przez półniezmienniki c^V dla reprezentacji $V \in \mathrm{rep}_Q(\mathbf{e})$.

Uwaga.

Istnieją półniezmienniki, które nie są postaci c^V dla reprezentacji V.

Uwaga.

Niech Q będzie kołczanem oraz $\mathbf{d}$ i $\mathbf{e}$ wektorami wymiaru takimi, że

$\langle \mathbf{e}, \mathbf{d}\rangle = 0$. Wiemy, że

$$c \in \mathrm{SI}(Q, \mathbf{e})_{-\langle -, \mathbf{d}\rangle} \otimes \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_{\langle \mathbf{e}, -\rangle}.$$

W szczególności, funkcja c indukuje odwzorowanie liniowe

$$\Phi(c) : D\,\mathrm{SI}(Q, \mathbf{e})_{-\langle -, \mathbf{d}\rangle} \to \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_{\langle \mathbf{e}, -\rangle}$$

dane wzorem

$$\Phi(c)(\varphi) := (\varphi \otimes \mathrm{Id})(c),$$

tzn. jeśli $c = \sum_i f_i \otimes g_i$, to $\Phi(c)(\varphi) := \sum_i \varphi(f_i) \cdot g_i$. Można pokazać, że $\Phi(c)$ jest izomorfizmem. W szczególności,

$$\dim_k \mathrm{SI}(Q, \mathbf{e})_{-\langle -, \mathbf{d}\rangle} = \dim_k \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_{\langle \mathbf{e}, -\rangle}.$$

§2. GIT-iloraz dla kołczanów

Definicja.

Dla grupy reduktywnej G działającej na rozmaitości X ilorazem $X//G$ nazywamy rozmaitość $\mathrm{Spec}(k[X]^G)$. Odwzorowanie $X \to X//G$ odpowiadające włożeniu $k[X]^G \to k[X]$ nazywamy odwzorowaniem ilorazowym.

Przykład.

Jeśli Q jest kołczanem bez zorientowanych cykli, to $\mathrm{rep}_Q(\mathbf{e})//\,\mathrm{GL}(\mathbf{e}) = \{*\}$.

Definicja.

Dla grupy reduktywnej G działającej na rozmaitości X oraz charakteru $\chi \in X(G)$ definiujemy

$$X//_\chi G := \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} k[X]^G_{\chi^n}\Big).$$

Uwaga.

Jeśli G jest grupą reduktywną działającą na rozmaitości X, to $X//_1 G = X//G$.

Uwaga.

Jeśli $X//G = \{*\}$ dla grupy reduktywnej G działającej na rozmaitości X, to rozmaitość $X//_\chi G$ jest rzutowa dla dowolnego charakteru $\chi \in X(G)$.

Definicja.

Dla grupy reduktywnej G działającej na rozmaitości X oraz charakteru $\chi \in X(G)$ definiujemy zbiór otwarty

$$X^{\chi\text{-sst}} := \{x \in X : f(x) \neq 0 \text{ dla pewnej funkcji } f \in k[X]^G_{\chi^n} \text{ i pewnej liczby } n \in \mathbb{N}_+\}.$$

Odwzorowanie

$$X^{\chi\text{-sst}} \ni x \mapsto \Big(f \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} k[X]^G_{\chi^n} : f(x) = 0\Big) \in X/\!/_\chi G$$

nazywamy odwzorowaniem ilorazowym.

Uwaga.

King pokazał, że jeśli Q jest kołczanem, $\mathbf{e}$ wektorem wymiaru, $\mu \in (\mathbb{Z}^{Q_0})^*$ i $V \in \operatorname{rep}_Q(\mathbf{e})$, to $V \in \operatorname{rep}_Q(\mathbf{e})^{\mu\text{-sst}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\mathbf{dim}\, V) = 0$ oraz $\mu(\mathbf{dim}\, U) \leq 0$ dla każdej podreprezentacji U reprezentacji V.

Przykład.

Jeśli Q jest ugólnionym kołczanem Kroneckera (z m strzałkami), $\mathbf{e} = (1, d)$ i $\mu = (d, -1)$, to $\operatorname{rep}_Q(\mathbf{e})/\!/_\mu \operatorname{GL}(\mathbf{e}) = \operatorname{Gr}(d, m)$.

§3. Równania domknięć orbit kowymiaru 1

Założenie.

W tym paragrafie będziemy zakładać, że Q jest ustalonym kołczanem bez zorientowanych cykli, $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ i $N \in \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})$, przy czym $\dim \mathscr{O}_N = \dim \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d}) - 1$.

Lemat.

Jeśli $n \in \mathbb{N}_+$, to zbiór

$$\Big\{W \in \operatorname{rep}_Q(n \cdot \mathbf{d}) : \text{istnieją reprezentacje } W_1, \ldots, W_n \in \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d}) \text{ takie, że } W \simeq \bigoplus_{i\in[1,n]} W_i\Big\}$$

jest gęsty w rozmaitości $\operatorname{rep}_Q(n \cdot \mathbf{d})$.

Dowód.

Niech $(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_m)$ będzie rozkładem kanonicznym wektora $\mathbf{d}$. Istnienie orbity kowymiaru 1 w rozmaitości $\operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})$ implikuje, że $\langle \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_i\rangle \geq 0$ dla każdego indeksu $i \in [1, m]$. W konsekwencji rozkład kanoniczny wektora $\mathbf{d}$ ma postać

$$(\underbrace{\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_1}_{n \text{ razy}}, \ldots, \underbrace{\mathbf{d}_m, \ldots, \mathbf{d}_m}_{n \text{ razy}}),$$

co kończy dowód. □

Lemat.

Istnieje wielomian taki, że $\mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_N) = (F)$.

Dowód.

Wynika natychmiast z faktu, że $\dim \mathscr{O}_N = \dim \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d}) - 1$ oraz zbiór $\mathscr{O}_N$ jest nieprzywiedlny. □

Założenie.

Przez resztę paragrafu ustalmy wielomian F taki, że $\mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_N) = (F)$.

Lemat.

Wielomian F jest nierozkładalny oraz istnieje charakter χ taki, że $F \in \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_\chi$.

Dowód.

Pierwsza część jest konsekwencją nieprzywiedlności zbioru $\mathscr{O}_N$. Druga wynika z faktu, że wielomiany F i $g * F$ mają te same zbiory zer dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{GL}(\mathbf{d})$. □

Lemat.

$\dim \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_\chi \leq 2$.

Dowód.

Zauważmy najpierw, że jeśli $v \in \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_\chi$ i $v(N) = 0$, to $v = \lambda \cdot F$ dla pewnego elementu $\lambda \in k$. Istotnie, z pierwszych dwóch założeń wynika, że $u = h \cdot F$ dla pewnego wielomianu h. Ponadto, $h \in \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_1 = k$, co kończy dowód tezy.

Załóżmy teraz, że $u, v \in \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_\chi$. Pokażemy, że warstwy wielomianów u i v są liniowo zależne modulo F. Jeśli $u(N) = 0$, to teza wynika natychmiast z powyższej obserwacji. W przeciwnym wypadku, korzystając ponownie z powyższej, obserwacji otrzymujemy, że wielomian $v - \frac{v(N)}{u(N)} \cdot u$ jest zerowy modulo F, co kończy dowód. □

Ustalmy wektor wymiar $\mathbf{e}$ taki, że $\chi = \langle \mathbf{e}, - \rangle$ i niech $\mu := -\langle -, \mathbf{d} \rangle$. Ponieważ

$$\dim_k \mathrm{SI}(Q, \mathbf{e})_\mu = \dim_k \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_\chi = 2,$$

więc naturalne odwzorowanie

$$S(\mathrm{SI}(Q, \mathbf{e})_\mu) \to \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{SI}(Q, \mathbf{e})_{n \cdot \mu}$$

jest monomorfizmem. Z drugiej strony, wykorzystując pierwszy z lematów tego paragrafu można pokazać, że musi być ono epimorfizmem, a więc ostatecznie jest ono izomorfizmem. W szczególności,

$$\mathrm{rep}_Q(\mathbf{e}) /\!/_\mu \mathrm{GL}(\mathbf{e}) \simeq \mathbb{P}(D\,\mathrm{SI}(Q, \mathbf{e})_\mu).$$

Niech

$$\pi : \mathrm{rep}_Q(\mathbf{e})^{\mu\text{-sst}} \to \mathbb{P}(D\,\mathrm{SI}(Q, \mathbf{e})_\mu)$$

będzie odwzorowaniem ilorazowym.

Stwierdzenie.

Jeśli $V \in \mathrm{rep}_Q(\mathbf{e})^{\mu\text{-sst}}$, to

$$(\mathbb{P}(\Phi(c)) \circ \pi)(V) = \mathbb{P}(c^V).$$

Dowód.

Niech $c = \sum_i f_i \otimes h_i$. Wtedy

$$c^V = \sum_i f_i(V) \cdot h_i.$$

Z drugiej strony

$$\pi(V) = [\varphi]$$

dla funkcjonału $\varphi \in D\,\mathrm{SI}(Q, \mathbf{e})_\mu$ takiego, że $\varphi(h) = 0$ dla wszystkich funkcji $h \in \mathrm{SI}(Q, \mathbf{e})_\mu$ takich, że $h(V) = 0$. Zauważmy, że

$$\Phi(c)(\varphi) = \sum_i \varphi(f_i) \cdot h_i.$$

Dla dowodu wystarczy pokazać, że wektory $(f_i(V))$ i $(\varphi(f_i))$ są liniowo zależne. W tym celu dla dowolnych indeksów i i j rozważmy funkcję

$$f := f_i(V) \cdot f_j - f_j(V) \cdot f_i.$$

Wtedy $f(V) = 0$, skąd $\varphi(f) = 0$, co oznacza, że

$$\det \begin{bmatrix} f_i(V) & f_j(V) \\ \varphi(f_i) & \varphi(f_j) \end{bmatrix} = 0$$

i kończy dowód. $\square$

Wniosek.

Istnieje reprezentacja $V \in \mathrm{rep}_Q(\mathbf{e})^{\mu\text{-sst}}$ taka, że $\mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_N) = (c^V)$.

Stwierdzenie.

Jeśli $V \in \mathrm{rep}_Q(\mathbf{e})^{\mu\text{-sst}}$ jest taką reprezentacją, że $\mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_N) = (c^V)$, to reprezentacja V jest prosta w kategorii

$$\{X \in \mathrm{rep}\, Q : \text{istnieje reprezentacja } W \in \mathrm{rep}_{kQ}(\mathbf{d}) \text{ taka,}$$
$$\text{że } \mathrm{Hom}_{kQ}(X, W) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{kQ}(X, W)\}.$$

W szczególności, $\mathrm{End}_{kQ}(V) = k$.

Dowód.

Wynika z nierozkładalności wielomianu c^V. $\square$

Lemat.

Jeśli $V, V' \in \mathrm{rep}_Q(\mathbf{e})^{\mu\text{-sst}}$ są takimi reprezentacjami, że

$$(c^V) = \mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_N) = (c^{V'}),$$

to $V \simeq V'$.

Dowód.

Z wcześniejszych rozważań wynika, że $\pi(V) = \pi(V')$, zatem teza wynika z własności odwzorowania π oraz poprzedniego stwierdzenia, które implikują, że $\pi^{-1}(\pi(V)) = \mathscr{O}_V$. $\square$

Lemat.

Jeśli $V \in \operatorname{rep}_Q(\mathbf{e})^{\mu\text{-sst}}$ jest taką reprezentacją, że $\mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_N) = (c^V)$, to

$$\dim_k \operatorname{Ext}^1_{kQ}(V,V) = \dim_k \operatorname{SI}(Q,\mathbf{d})_\chi - 1.$$

Dowód.

Mamy ciąg równości

$$\begin{aligned}
\dim_k \operatorname{Ext}^1_{kQ}(V,V) &= \dim \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d}) - \dim \mathscr{O}_V \\
&= \dim \pi^{-1}(\pi(V)) + \dim \mathbb{P}(D\operatorname{SI}(Q,\mathbf{e})_\mu) - \dim \mathscr{O}_V \\
&= \dim \mathscr{O}_V + \dim D\operatorname{SI}(Q,\mathbf{e})_\mu - 1 - \dim \mathscr{O}_V \\
&= \dim \operatorname{SI}(Q,\mathbf{d})_\chi - 1,
\end{aligned}$$

który kończy dowód. □