RÓWNANIA WYZNACZNIKOWE OPISUJĄCE DOMKNIĘCIA ORBIT

NA PODSTAWIE REFERATU GRZEGORZ ZWARY

Założenie.

Przez cały referat k będzie oznaczać ustalone ciało algebraicznie domknięte.

§1. Ideały wyznaczone przez minory

Założenie.

Przez cały paragraf R będzie oznaczać ustalony pierścień przemienny.

Definicja.

Niech $U \in \mathbb{M}_{p\times q}(R)$, $p, q \in \mathbb{N}$. Dla liczby $t \in [1, \min(p, q)]$ przez $\mathscr{I}_t(U)$ oznaczamy ideał pierścienia R generowany przez wszystkie $t\times t$-minory macierzy U. Ponadto definiujemy $\mathscr{I}_0(U) := R$ oraz $\mathscr{I}_t(U) := 0$ dla liczby $t \in [\min(p, q) + 1, \infty[$. Zauważmy, że

$$\mathscr{I}_{t+1}(U) \subseteq \mathscr{I}_t(U)$$

dla każdej liczby $t \in \mathbb{N}$.

Lemat.

Jeśli $U \in \mathbb{M}_{p\times q}(R)$ i $V \in \mathbb{M}_{q\times r}(R)$, $p, q, r \in \mathbb{N}$, to

$$\mathscr{I}_t(U \cdot V) \subseteq \mathscr{I}_t(U) \cdot \mathscr{I}_t(V) \subseteq \mathscr{I}_t(U) \cap \mathscr{I}_t(V)$$

dla każdej liczby $t \in \mathbb{N}$.

Dowód.

Wystarczy wykorzystać tożsamość

$$(U \cdot V)_{K,L} = \sum_{\substack{N\subseteq[1,q]\\ |N|=t}} U_{K,N} \cdot V_{N,L}$$

mająca miejsce dla dowolnych podzbiorów $K \subseteq [1, p]$ i $N \subseteq [1, r]$ takich, że $|K| = t = |N|$. $\square$

Wniosek.

Jeśli $U \in \mathbb{M}_{p\times p}(R)$, $V \in \mathbb{M}_{p\times q}(R)$ i $W \in \mathbb{M}_{q\times q}(R)$, $p, q \in \mathbb{N}$, oraz macierze U i W są odwracalne, to

$$\mathscr{I}_t(U \cdot V \cdot W) = \mathscr{I}_t(V)$$

dla każdej liczby $t \in \mathbb{N}$.

Data: 22.04.2010 i 29.04.2010.

Lemat.

Jeśli $U \in \mathbb{M}_{p\times q}(R)$ i $V \in \mathbb{M}_{r\times s}(R)$, $p, q, r, s \in \mathbb{N}$, oraz

$$W := \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix},$$

to

$$\mathscr{I}_t(W) = \sum_{i\in[0,t]} \mathscr{I}_i(U) \cdot \mathscr{I}_{t-i}(V)$$

dla każdej liczby $t \in \mathbb{N}$.

Wniosek.

Jeśli $U \in \mathbb{M}_{p\times q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ i

$$W := \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_s \end{bmatrix},$$

to

$$\mathscr{I}_t(W) = \mathscr{I}_{t-s}(U)$$

dla każdej liczby $t \in [s, \infty[$.

§2. Ideały wyznaczone przez minory i elementy algebry

Założenie.

Przez cały paragraf A będzie oznaczać ustaloną skończenie wymiarową algebrę oraz $d \in \mathbb{N}$. Ponadto $R := k[\mathrm{mod}_A^d]$.

Oznaczenia.

Dla modułu $M \in \mathrm{mod}_A^d(k)$ oraz macierzy $\mathbf{a} \in \mathbb{M}_{p\times q}(A)$, $p, q \in \mathbb{N}$, definiujemy macierz $M(\mathbf{a}) \in \mathbb{M}_{p\cdot d\times q\cdot d}(k)$ w oczywisty sposób.

Lemat.

Jeśli $M, N \in \mathrm{mod}_A^d(k)$ i $M \simeq N$, to $\mathrm{rk}\, M(\mathbf{a}) = \mathrm{rk}\, N(\mathbf{a})$ dla każdej macierzy $\mathbf{a} \in \mathbb{M}_{p\times q}(A)$.

Wniosek.

Jeśli $M, N \in \mathrm{mod}_A^d(k)$ i $N \in \overline{\mathscr{O}}_M$, to $\mathrm{rk}\, N(\mathbf{a}) \leq \mathrm{rk}\, M(\mathbf{a})$ dla każdej macierzy $\mathbf{a} \in \mathbb{M}_{p\times q}(A)$.

Definicja.

Niech $X \in \mathrm{mod}_A^d(R)$ będzie elementem odpowiadającym odwzorowaniu $\mathbf{1}_R$ przy izomorfizmie

$$\mathrm{mod}_A^d(R) \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(R, R).$$

W szczególności, dla każdego elementu $a \in A$ mamy macierz $X(a) \in \mathbb{M}_d(R)$. Zauważmy, że $X(a)(M) = M(a)$ dla każdego modułu $M \in \mathrm{mod}_A^d(k)$. Dla macierzy $\mathbf{a} \in \mathbb{M}_{p\times q}(A)$ definiujemy macierz $X(\mathbf{a}) \in \mathbb{M}_{p\cdot d\times q\cdot d}(R)$ w oczywisty sposób.

Ustalmy moduł $M \in \mathrm{mod}_A^d(k)$. Dla macierzy $\mathbf{a} \in \mathbb{M}_{p\cdot d\times q\cdot d}(R)$ definiujemy ideał

$$\mathscr{I}_{M,\mathbf{a}} := \mathscr{I}_{\mathrm{rk}\, M(\mathbf{a})+1}(X(\mathbf{a}))$$

pierścienia R. Zauważmy, że

$$\mathscr{I}_{M,\mathbf{a}} \subseteq \mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_M).$$

Wreszcie definiujemy

$$\mathscr{I}_M := \sum_{\mathbf{a}} \mathscr{I}_{M,\mathbf{a}}$$

oraz przez $\mathscr{C}_M$ oznaczamy domknięty podschemat schematu mod_A^d wyznaczony przez ideał $\mathscr{I}_M$.

Uwaga.

Jeśli A jest algebrą skończonego typu reprezentacyjnego lub ilorazem dziedzicznej algebry oswojonego typu reprezentacyjnego, to

$$\sqrt{\mathscr{I}_M} = \mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_M)$$

dla każdego modułu $M \in \operatorname{mod}_A^d(k)$. Dodatkowo, jeśli A jest ilorazem algebry dróg kołczanu Dynkina typu $\mathbb{A}$, to

$$\mathscr{I}_M = \mathscr{I}(\overline{\mathscr{O}}_M)$$

dla każdego modułu $M \in \operatorname{mod}_A^d(k)$.

Oznaczenia.

Dla macierzy $\mathbf{a} \in \mathbb{M}_{p\times q}(A)$, $p, q \in \mathbb{N}$, oznaczamy przez $\nu_{\mathbf{a}}$ odwzorowanie $A^p \to A^q$ wyznaczone przez macierz $\mathbf{a}^{\mathrm{tr}}$.

Lemat.

Niech $M \in \operatorname{mod}_A^d(k)$ oraz $\mathbf{a} \in \mathbb{M}_{p\times q}(A)$ i $\mathbf{a}' \in \mathbb{M}_{p'\times q'}(A)$, $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$. Jeśli

$$\operatorname{Coker}(\nu_{\mathbf{a}}) \simeq \operatorname{Coker}(\nu_{\mathbf{a}'}),$$

to

$$\mathscr{I}_{M,\mathbf{a}} = \mathscr{I}_{M,\mathbf{a}'}.$$

Dowód.

Niech

$$f := \nu_{\mathbf{a}} \qquad \text{i} \qquad f' := \nu_{\mathbf{a}'}$$

oraz

$$g : A^q \to \operatorname{Coker}(f) \qquad \text{i} \qquad g' : A^q \to \operatorname{Coker}(f')$$

będą odwzorowaniami ilorazowymi. Ustalmy izomorfizm

$$\xi : \operatorname{Coker}(f) \to \operatorname{Coker}(f')$$

i niech $\xi' := \xi^{-1}$. Istnieją homomorfizmy

$$h : A^q \to A^{q'} \qquad \text{i} \qquad h' : A^{q'} \to A^q$$

takie, że

$$\xi \circ g = g' \circ h \qquad \text{i} \qquad \xi' \circ g' = g \circ h'.$$

Podobnie, istnieją homomorfizmy

$$l : A^p \to A^{p'} \qquad \text{i} \qquad l' : A^{p'} \to A^p$$

takie, że

$$h \circ f = f' \circ l \qquad \text{i} \qquad h' \circ f' = f \circ l'.$$

Wreszcie, istnieją homomorfizmy

$$\varphi : A^q \to A^p \qquad \text{i} \qquad \varphi' : A^{q'} \to A^{p'}$$

takie, że

$$\mathbf{1}_{A_q} - h' \circ h = f \circ \varphi \qquad \text{i} \qquad \mathbf{1}_{A_{q'}} - h \circ h' = f' \circ \varphi'.$$

Powyższe równości prowadzą do równości

$$\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{A^{q'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h' & f \circ \varphi \\ \mathbf{1}_{A^{q'}} & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{A^q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l & \varphi' \\ f & h' \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{A^q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h & f' \circ \varphi' \\ \mathbf{1}_{A^q} & h' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{A^{q'}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l' & \varphi \\ f' & h \end{bmatrix}$$

W szczególności

$$\mathscr{I}_{t-d\cdot q'}(X(\mathbf{a})) = \mathscr{I}_t\left(\begin{bmatrix} X(\mathbf{a}) & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{R^{d\cdot q'}} \end{bmatrix}\right) = \mathscr{I}_t\left(\begin{bmatrix} X(\mathbf{a}') & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{R^{d\cdot q}} \end{bmatrix}\right) = \mathscr{I}_{t-d\cdot q}(X(\mathbf{a}'))$$

dla dowolnej liczby $t \in [\max(d\cdot q, d\cdot q'), \infty[$. Zauważmy, że mamy ciąg dokładny

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Coker} f, M) \to k^{d\cdot q} \xrightarrow{M(\mathbf{a})} k^{d\cdot p},$$

skąd wynika, że

$$\operatorname{rk} M(\mathbf{a}) = d\cdot q - \dim_k \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Coker} f, M).$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$\operatorname{rk} M(\mathbf{a}') = d\cdot q' - \dim_k \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Coker} f, M),$$

zatem teza wynika z powyżej równości zastosowanej dla

$$t := d\cdot q + d\cdot q' + 1 - \dim_k \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Coker} f, M). \qquad \square$$

Oznaczenia.

Niech $M \in \operatorname{mod}_A^d(k)$. Jeśli L jest A-modułem, to definiujemy

$$\mathscr{I}_{M,L} := \operatorname{Coker} \mathscr{I}_{M,\mathbf{a}},$$

gdzie $\mathbf{a} \in \mathbb{M}_{p\times q}(A)$ jest taką macierzą dla pewnych liczb $p, q \in \mathbb{N}$, że

$$\operatorname{Coker} \nu_{\mathbf{a}} \simeq L.$$

Zauważmy, że

$$\mathscr{Z}(\mathscr{I}_{M,L}) = \{N \in \operatorname{mod}_A^d(k) : \dim_k \operatorname{Hom}_A(L, N) \geq \dim_k \operatorname{Hom}_A(M, N)\}.$$

Lemat.

Niech $M \in \operatorname{mod}_A^d(k)$. Jeśli L i L' są A-modułami, to

$$\mathscr{I}_{M,L\oplus L'} \subseteq \mathscr{I}_{M,L} + \mathscr{I}_{M,L'}.$$

Dowód.

Wystarczy wykorzystać fakt, że jeśli $L \simeq \operatorname{Coker} \nu_{\mathbf{a}}$ i $L' \simeq \operatorname{Coker} \nu_{\mathbf{a}'}$ dla macierzy $\mathbf{a}$ i $\mathbf{a}'$, to

$$L \oplus L' \simeq \operatorname{Coker} \nu_{\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}' \end{smallmatrix}\right]}. \quad \square$$

Wniosek.

Jeśli $M \in \operatorname{mod}_A^d(k)$, to

$$\mathscr{I}_M = \sum_{L \in \operatorname{ind} A} \mathscr{I}_{M,L}.$$

Przykład.

Jeśli $A := k[X]/(X^2)$ i $M := A$, to

$$\overline{\mathscr{O}}_M = (\mathscr{C}_M)_{\mathrm{red}} = (\operatorname{mod}_A^2)_{\mathrm{red}},$$

ale

$$\overline{\mathscr{O}}_M \subsetneq \mathscr{C}_M \subsetneq \operatorname{mod}_A^2.$$

Istotnie

$$\begin{aligned} k[\operatorname{mod}_A^2] &= k[X_1, X_2, X_3, X_4]/(X_1^2 + X_2 \cdot X_3, X_1 \cdot X_2 + X_2 \cdot X_3, \\ &\qquad X_2 \cdot X_3 + X_3 \cdot X_4, X_2 \cdot X_3 + X_4^2), \\ k[\mathscr{C}_M] &= k[X_1, X_2, X_3, X_4]/(X_1^2 + X_2 \cdot X_3, X_1 \cdot X_2 + X_2 \cdot X_3, \\ &\qquad X_2 \cdot X_3 + X_3 \cdot X_4, X_2 \cdot X_3 + X_4^2, \\ &\qquad X_1 \cdot X_4 - X_2 \cdot X_3), \end{aligned}$$

i

$$k[\overline{\mathscr{O}}_M] = k[X_1, X_2, X_3, X_4]/(X_1 + X_4, X_1 \cdot X_4 - X_2 \cdot X_3).$$

§3. Przestrzeń styczna

Założenie.

Przez cały paragraf A będzie oznaczać ustaloną skończenie wymiarową algebrę oraz $d \in \mathbb{N}$. Ustalmy także moduły $M \in \operatorname{mod}_A^d(k)$ i $N \in \mathscr{C}_M(k)$ oraz niech

$$\mathscr{F} := \{L \in \operatorname{ind} A : \dim_k \operatorname{Hom}_A(L, M) = \dim_k \operatorname{Hom}_A(L, N)\}.$$

Stwierdzenie.

Niech $Z \in \mathbb{Z}_A^1(N, N)$. Wtedy $Z \in T_N \mathscr{C}_M$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\dim_k \operatorname{Hom}_A(L, N^Z) = 2 \cdot \dim_k \operatorname{Hom}_A(L, N)$$

dla każdego modułu $L \in \mathscr{F}$, gdzie

$$N^Z := \begin{bmatrix} N & Z \\ 0 & N \end{bmatrix}.$$

Równoważnie, $Z \in T_N \mathscr{C}_M$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ \xi^Z = 0$ dla każdych modułu $L \in \mathscr{F}$ i homomorfizmu $f \in \operatorname{Hom}_A(L, N)$, gdzie ξ^Z jest kanonicznym ciągiem

$$0 \to N \to N^Z \to N \to 0.$$

Oznaczenia.

Dla modułu $U \in \operatorname{mod} A$ definiujemy

$$\mathscr{E}(U,U) := \{\xi \in \operatorname{Ext}^1_A(U,U) : f \circ \xi = 0 \text{ dla każdych modułu } L \in \mathscr{F} \text{ i homomorfizmu } f \in \operatorname{Hom}_A(L,U)\}.$$

Wniosek.

Schemat $\mathscr{C}_M$ jest regularny w punkcie N wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\dim_k \mathscr{E}(N,N) = \dim_k \operatorname{End}_A(N) - \dim_k \operatorname{End}_A(M).$$

Oznaczenia.

Dla każdego modułu $U \in \operatorname{mod} A$ definiujemy „uniwersalny" ciąg dokładny

$$0 \to V_U \to W_U \to U \to 0,$$

gdzie

$$W_U := \bigoplus_{L \in \mathscr{F}} L \otimes_k \operatorname{Hom}_A(L,U).$$

Lemat.

$V_N \in \operatorname{add} \mathscr{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V_U \in \operatorname{add} \mathscr{F}$ dla każdego modułu $U \in \operatorname{mod} A$.

Stwierdzenie.

Schemat $\mathscr{C}_M$ jest regularny w punkcie N wtedy i tylko wtedy, gdy $V_N \in \operatorname{add} \mathscr{F}$ oraz $\mathscr{E}(M,M) = 0$.