DEGENERACJE MODUŁÓW DLA ALGEBR SKOŃCZONEGO TYPU REPREZENTACYJNEGO

NA PODSTAWIE REFERATU GRZEGORZA ZWARY

Przez cały referat zakładamy, że A jest skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym k. Wszystkie rozważane moduły są skończenie wymiarowymi lewymi A-modułami. Dla modułów M i N definiujemy liczbę $[M, N]$ wzorem

$$[M, N] := \dim_k \operatorname{Hom}_A(M, N).$$

Mówimy, że moduł M degeneruje się do modułu N (i piszemy $M \leq_{\text{deg}} N$), jeśli istnieje ciąg dokładny postaci

$$0 \to Z \to Z \oplus M \to N \to 0.$$

Zwara udowodnił, że $M \leq_{\text{deg}} N$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg dokładny postaci

$$0 \to N \to M \oplus Z \to Z \to 0.$$

Zauważmy, że bezpośrednio z definicji wynika, że jeśli $M \leq_{\text{deg}} N$, to $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{dim}\, N$.

Lemat. *Przypuśćmy, że* $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{dim}\, N$ *dla modułów* M *i* N. *Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) $[U, M] \leq [U, N]$ *dla każdego modułu* U.
(2) $[U, M] \leq [U, N]$ *dla każdego nierozkładalnego modułu* U.
(3) $[M, U] \leq [N, U]$ *dla każdego modułu* U.
(4) $[M, U] \leq [N, U]$ *dla każdego nierozkładalnego modułu* U.

Dowód. W dowodzie wykorzystujemy wzór Auslandera–Reiten mówiący, że dla każdego nierozkładalnego nieprojektywnego modułu U oraz wszystkich modułów M i N takich, że $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{dim}\, N$, mamy równość

$$[U, N] - [N, \tau U] = [U, M] - [M, \tau U].$$ □

Piszemy $M \leq_{\text{hom}} N$, jeśli $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{dim}\, N$ oraz

$$[U, M] \leq [U, N]$$

dla każdego modułu U. Zauważmy, że jeśli $M \leq_{\text{deg}} N$, to $M \leq_{\text{hom}} N$.

Lemat. *Jeśli* $M \leq_{\text{hom}} N$ *i* $M \not\simeq N$, *to*

$$[N, M] < [N, N] \qquad i \qquad [M, N] < [N, N].$$

Data: 07.11.2010.

Dowód. Ustalmy moduły L, M' i N' takie, że moduły M' i N' nie mają niezerowego wspólnego składnika prostego oraz

$$M = M' \oplus L \qquad \text{i} \qquad N = N' \oplus L.$$

Zauważmy, że $M' \leq_{\mathrm{hom}} N'$.

Ustalmy bazą liniową $(f_1, \dots, f_r)$ przestrzeni $\mathrm{Hom}_A(M', N')$. Niech

$$f := \begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_r \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

i $C := \mathrm{Coker}\, f$. Wtedy funkcja $\mathrm{Hom}_A(f, N')$ jest epimorfizmem. Z drugiej strony, ponieważ moduły M' i N' nie są izomorficzne i nie mają niezerowego wspólnego składnika prostego, więc funkcja $\mathrm{Hom}_A(f, M')$ nie jest epimorfizmem. Stąd

$$r \cdot [N', M'] < [C, M'] + [M', M'] \leq [C, N'] + [M', N'] = r \cdot [N', N'].$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}[N, M] = [N', M'] + [N', L] + [L, M] \\ < [N', N'] + [N', L] + [L, N] = [N, N],\end{aligned}$$

co kończy dowód pierwszej nierówności.

Dowód drugiej nierówności jest analogiczny. □

Twierdzenie. *Jeśli algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego oraz M i N są A-modułami, to*

$$M \leq_{\mathrm{deg}} N \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } M \leq_{\mathrm{hom}} N.$$

Dowód. Przez $\mathrm{ind}\, A$ oznaczmy ustalony maksymalny zbiór parami nieizomorficznych modułów nierozkładalnych.

Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą wszystkich ciągów dokładnych

$$0 \to U \to W \to N \to 0$$

takich, że $M \oplus U \leq_{\mathrm{hom}} W$. Zauważmy, że klasa $\mathcal{F}$ jest niepusta, gdyż ciąg

$$0 \to 0 \to N \to N \to 0$$

należy do klasy $\mathcal{F}$. Dla ciągu

$$\sigma : 0 \to U \to W \to N \to 0$$

z klasy $\mathcal{F}$ definiujemy liczbę Δ_σ wzorem

$$\Delta_\sigma := \sum_{X \in \mathrm{ind}\, A} ([U \oplus N, X] - [W, X]).$$

Zauważmy, że

$$\Delta_\sigma \leq \sum_{X \in \mathrm{ind}\, A} ([N, X] - [M, X])$$

dla każdego ciągu $\sigma \in \mathcal{F}$, zatem

$$\max\{\Delta_\sigma : \sigma \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Ustalmy ciąg

$$\sigma : 0 \to U \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} N \to 0$$

taki, że

$$\Delta_\sigma = \max\{\Delta_\tau : \tau \in \mathcal{F}\}.$$

Pokażemy, że $W \simeq U \oplus M$, co zakończy dowód.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $f \in \operatorname{rad}_A(U, W)$. Przypuśćmy, że $W \not\simeq U \oplus M$. Wtedy $M \oplus U <_{\text{hom}} W$, więc istnieje nierozkładalny składnik prosty W' modułu W taki, że

$$[W', M \oplus U] < [W', W].$$

Ustalmy moduł W'' oraz homomorfizmy f', f'', g' i g'' takie, że $W = W' \oplus W''$,

$$f = \begin{bmatrix} f' & f'' \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \text{i} \qquad g = \begin{bmatrix} g' & g'' \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że moduł W' jest nie projektywny. Niech

$$0 \to \tau W' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} W' \to 0$$

będzie ciągiem Auslandera–Reiten. Ponieważ $f' \in \operatorname{rad}_A(U, W')$, więc istnieje ciąg homomorfizm $h : U \to E$ taki, że $f' = h \circ \alpha$. Wtedy ciąg

$$\sigma' : 0 \to U \oplus \tau W' \xrightarrow{\begin{bmatrix} f'' & 0 \\ h & \alpha \end{bmatrix}} W'' \oplus E \xrightarrow{\begin{bmatrix} g'' & g' \circ \beta \end{bmatrix}} N \to 0$$

jest dokładny. Ponadto, $\sigma' \in \mathcal{F}$ oraz $\Delta_{\sigma'} = \Delta_\sigma + 1$, co prowadzi do sprzeczności i kończy dowód. □

Przedstawimy teraz metodę pozwalającą wyliczyć $[X, Y]$ dla modułów nierozkładalnych X i Y, jeśli algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego, na podstawie znajomości kołczanu Auslandera–Reiten algebry A.

Dla liczby $i \in \mathbb{N}$ oraz nierozkładalnych modułów X i Y definiujemy liczbę $l_i(X, Y)$ wzorem

$$l_i(X, Y) := \dim_k \operatorname{rad}_A^i(X, Y) - \dim_k \operatorname{rad}_A^{i+1}(X, Y).$$

Mamy wtedy następujące własności:

(1) Jeśli X i Y są modułami nierozkładalnymi, to

$$[X, Y] = \sum_{i \in [0, 4 \cdot l - 2]} l_i(X, Y).$$

(2) Jeśli X i Y są modułami nierozkładalnymi, to

$$l_0(X, Y) = \delta_{[X],[Y]} \qquad \text{i} \qquad l_1(X, Y) = \dim_k \operatorname{Irr}(X, Y).$$

(3) Jeśli Y jest nierozkładalnym modułem projektywnym i $\operatorname{rad} Y = \bigoplus_{i \in [1,k]} Z_k$ dla modułów nierozkładalnych $Z_1, \ldots, Z_k$, to

$$l_{i+1}(X, Y) = \sum_{j \in [1,k]} l_i(X, Z_j)$$

dla każdego modułu nierozkładalnego X i każdej liczby $i \in \mathbb{N}_+$.

(4) Jeśli Y jest nierozkładalnym modułem nieprojektywnym, ciąg

$$0 \to \tau Y \to E \to Y \to 0$$

jest ciągiem Auslandera–Reiten, oraz $E = \bigoplus_{i\in[1,k]} Z_k$ dla modułów nierozkładalnych $Z_1, \dots, Z_k$, to

$$l_{i+1}(X,Y) = \sum_{j\in[1,k]} l_i(X, Z_j) - l_{i-1}(X, \tau Y)$$

dla każdego modułu nierozkładalnego X i każdej liczby $i \in \mathbb{N}_+$.

Na zakończenie sformułujemy dwa hipotezy:

(1) Jeśli $M \leq_{\mathrm{deg}} N$ i moduł N jest nierozkładalny, to

$$[N,N] - [M,M] = 1.$$

(2) Przypuśćmy, że $M \leq_{\mathrm{deg}} N$ i $[N,N] - [M,M] = 2$. Wtedy

$$\#\{[W] : M <_{\mathrm{deg}} W <_{\mathrm{deg}} N\} \leq 3.$$

W przypadku obu hipotez algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego.