PROBLEM KROTNOŚCI I IZOMORFIZMU DLA CZTERECH PODPRZESTRZENI

NA PODSTAWIE REFERATU ANDRZEJA MROZA

Przez cały referat k oznacza ustalone ciało algebraicznie domknięte. Wszystkie rozważane moduły są skończenie wymiarowe.

Niech Λ będzie algebrą. Przez $\mathcal{X}(\Lambda)$ oznaczmy ustalony zbiór reprezentantów klas izomorfizmu skończenie wymiarowych nierozkładalnych Λ-modułów. Dla Λ-modułu M oraz nierozkładalnego Λ-modułu X przez $m(M)_X$ oznaczmy największą liczbę całkowitą nieujemną m taką, że moduł X^m jest składnikiem prostym modułu M. Wtedy

$$M \simeq \bigoplus_{X \in \mathcal{X}(\Lambda)} X^{m(M)_X}.$$

Problemem krotności nazywamy problem wyznaczenia, dla ustalonego Λ-modułu M, liczb $m(M)_X$, $X \in \mathcal{X}(\Lambda)$. Problemem izomorfizmu nazywamy problem odpowiedzi na pytanie, dla ustalonych Λ-modułów M i N, czy moduły M i N są izomorficzne.

Oczywiście rozwiązanie problemu izomorfizmu dla modułów M i N pozwala rozstrzygnąć problem izomorfizmu dla modułów M i N. Z drugiej strony, rozstrzygnięcie problemu izomorfizmu dla modułów M i N nie musi wymagać rozwiązania problemu izomorfizmu dla modułów M i N. Istotnie, problem krotności dla algebry $k[t]$ jest równoważny problemowi znajdowania postaci Jordana dla macierzy, a więc jest niealgorytmiczny, gdyż wymaga znajdowania pierwiastków równań wielomianowych. Z drugiej strony, mówimy, że macierzy $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{M}_{n\times n}(k[t])$ są równoważne, jeśli istnieją macierze odwracalne $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ o współczynnikach w pierścieniu $k[t]$ takie, że

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathcal{D}.$$

Problem rozstrzygania równoważności macierzy o współczynnikach w pierścieniu $k[t]$ jest algorytmiczny. Ponadto można pokazać, że jeśli M i N są macierzami kwadratowymi o współczynnikach w ciele k, to wyznaczone przez nie $k[t]$-moduły są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $M - t \cdot \mathrm{Id}$ i $N - t \cdot \mathrm{Id}$ są podobne.

Następujące twierdzenie pozwala rozstrzygać problem izomorfizmu w przypadku algebr skończonego typu reprezentacyjnego.

Twierdzenie (Auslander). *Niech M i N będą modułami nad skończenie wymiarową algebrą Λ. Wtedy moduły M i N są izomorficzne wtedy*

Data: 14.11.2010.

i tylko wtedy, gdy

$$[M,X]=[N,X]$$

dla wszystkich modułów $X\in\mathcal{X}(\Lambda)$*, gdzie dla* Λ*-modułów* Y *i* Z *piszemy*

$$[Y,Z]:=\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Y,Z).$$

Poniższe stwierdzenie pozwala badać stosowny warunek dla skończonego zbioru modułów, wymaga to jednak znajomości rozwiązania problemu krotności.

Stwierdzenie (Forbregd/Nornes/Smalø)**.** *Niech* M *i* N *będą modułami nad skończenie wymiarową algebrą* Λ*. Niech*

$$L_0:=M\oplus N \qquad i \qquad L_{i+1}:=(\operatorname{rad}\operatorname{End}(L_i))(L_i) \qquad (i\in\mathbb{N}).$$

Wtedy moduły M *i* N *są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$[M,X]=[N,X]$$

dla wszystkich modułów $X\in\mathcal{X}(\Lambda)$*, które są składnikami prostymi modułu* $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}L_i$*.*

Niech Λ będzie algebrą. Przypomnijmy, że

$$m(X)_X=[M,X]+[M,\tau X]-\sum_{Y\in\mathcal{X}(\Lambda)}\dim_k \operatorname{Irr}_\Lambda(Y,X)\cdot[M,Y]$$

dla każdego nierozkładalnego Λ-modułu X oraz każdego Λ-modułu M. Stąd, jeśli algebra Λ jest skończonego typu reprezentacyjnego oraz zdefiniujemy macierz $T\in\mathbb{M}_{\mathcal{X}(\Lambda)\times\mathcal{X}(\Lambda)}(k)$ wzorami

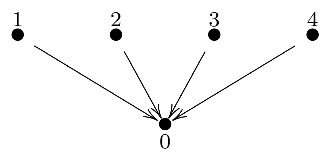
$$T(X,Y):=\begin{cases}1 & X\not\simeq\tau X \text{ oraz}\\ & \qquad \text{albo } Y\simeq X \text{ lub } Y\simeq\tau X,\\ 2 & X\simeq Y\simeq\tau X,\\ -\dim_k\operatorname{Irr}_\Lambda(Y,X) & \text{w przeciwnym wypadku,}\end{cases}$$

to macierz T jest odwracalna oraz

$$T^{-1}(X,Y)=[Y,X]$$

dla wszystkich modułów $X,Y\in\mathcal{X}(\Lambda)$.

Niech teraz Λ będzie algebrą dróg kołczanu



.

Moduły nad algebrą Λ możemy utożsamiać z ciągami (A,B,C,D) macierzy odpowiednich rozmiarów. Nierozkładalny Λ-moduł X nazywamy ciągłym, jeśli $\tau X\simeq X$. Definiujemy zbiór $\operatorname{cont}X(\Lambda)$ wzorem

$$\operatorname{cont}X(\Lambda):=\{X\in\mathcal{X}(\Lambda):\tau X\simeq X\}.$$

Dla elementu $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$ definiujemy reprezentację $R^\Lambda(\lambda)$ wzorem

$$R^\Lambda(\lambda) := \begin{tikzcd} k \arrow[drr, "{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}"'] & k \arrow[dr, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"] & & k \arrow[dl, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]}"'] & k \arrow[dll, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\\lambda\end{smallmatrix}\right]}"] \\ & & k^2 & & \end{tikzcd}.$$

Jeśli

$$\mathcal{T}_\lambda := \{X \in \operatorname{cont} \mathcal{X}(\Lambda) : [R^\Lambda(\lambda), X] \neq 0\},$$

to zbiór $\operatorname{cont} \mathcal{X}(\Lambda)$ jest sumą rozłączną zbiorów $\mathcal{T}_\lambda$, $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$. Ponadto, dla każdego elementu $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$ oraz każdej liczby $l \in \mathbb{N}_+$ istnieje dokładnie jeden moduł $R \in \mathcal{T}_\lambda$ taki, że

$$\mathbf{dim}\, R = l \cdot \mathbf{dim}\, R^\Lambda(\lambda).$$

Moduł ten będziemy oznaczać $R^\Lambda(l, \lambda)$.

Dla Λ-modułu $M = (A, B, C, D)$ definiujemy liczbę $p(M)$ wzorem

$$p(M) = 2 \cdot \sum_{X \in \mathcal{O}(0)} m(M)_X + \sum_{i \in [1,4]} \sum_{X \in \mathcal{O}(i)} m(M)_X,$$

gdzie dla wierzchołka $i \in [0,4]$ definiujemy zbiór $\mathcal{O}(i)$ wzorem

$$\mathcal{O}(i) := \{X \in \mathcal{X}(\Lambda) : \text{istnieje liczba } n \in \mathbb{N} \text{ taka, że } X \simeq \tau^{-n} P_\Lambda(i)\}.$$

Następnie definiujemy macierz $\mathcal{M}_M$ o współczynnikach w pierścieniu $k[t]$ wzorem

$$\mathcal{M}_M := \begin{bmatrix} 0 & B & C & D \\ A & 0 & C & t \cdot D \end{bmatrix}.$$

Wielomianem charakterystycznym χ_M modułu M nazywamy największy wspólny dzielnik minorów stopnia $2 \cdot \dim_k M_0 - p(M)$ macierzy $\mathcal{M}_M$. Spektrum $\operatorname{Spec}(M)$ modułu M nazywamy zbiór pierwiastków wielomianu χ_M różnych od 0 i 1.

Twierdzenie. *Niech M będzie Λ-modułem i $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$. Wtedy*

$$\#\{R \in \mathcal{T}_\lambda : R \textit{ jest składnikiem prostym modułu } M\} \\ = 2 \cdot \dim_k M_0 - \operatorname{rk} \mathcal{M}_M(\lambda) - p(M).$$

W szczególności, $\lambda \in \operatorname{Spec} M$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje moduł $R \in \mathcal{T}_\lambda$, który jest składnikiem prostym modułu M.

Można pokazać, że jeśli znamy spektrum modułu M, to istnieje algorytm o złożoności $O((\dim M)^4)$ pozwalający rozwiązać problem krotności dla modułu M.

Dla wektora wymiaru $\mathbf{d}$ definiujemy zbiór $\mathcal{D}(\mathbf{d})$ wzorem

$$\mathcal{D}(\mathbf{d}) := \{X \in \mathcal{X}(\Lambda) : \mathbf{dim}\, X \leq \mathbf{d},\ \mathbf{dim}\, \tau^{-1} X \leq \mathbf{d}, \text{ lub} \\ \text{istnieje moduł } Y \in \mathcal{X}(\Lambda) \text{ taki, że } \operatorname{Irr}_\Lambda(X, Y) \neq 0 \text{ i } \mathbf{dim}\, Y \leq \mathbf{d}\}.$$

Dla Λ-modułu $M = (A, B, C, D)$ definiujemy macierz charakterystyczną ζ_M^Λ, która jest macierzą o współczynnikach w pierścieniu $k[t]$, wzorem

$$\zeta_M^\Lambda := \begin{bmatrix} A - t \cdot A & B & -t \cdot C & 0 \\ 0 & -t \cdot B & C & D - t \cdot D \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie. *Niech M i N będą Λ-modułami takimi, że $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{dim}\, N$. Wtedy moduły M i N są izomorficzne wtedi tylko wtedy, gdy*

$$[M, X] = [N, X]$$

dla każdego modułu $X \in \mathcal{D}(\mathbf{dim}\, M)$ oraz macierze ζ_M^Λ i ζ_N^Λ są równoważne.

Niech Π będzie algebrą Kroneckera. W dowodzie wykorzystujemy funktor $\Phi : \operatorname{mod} \Lambda \to \operatorname{mod} \Pi$ zdefiniowany wzorem

$$\Phi(A, B, C, D) := \left(\begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & B & 0 & D \end{bmatrix} \right).$$

Wtedy

$$\Phi(R^\Lambda(l, \lambda)) \simeq R^\Pi(l, \xi_1) \oplus R^\Pi(l, \xi_2) \oplus R^\Pi(1, 1)^{2 \cdot l}$$

dla każdego elementu $\lambda \in \{0, 1\}$ i każdej liczby $l \in \mathbb{N}_+$, gdzie ξ_1 i ξ_2 są pierwiastkami równania

$$\xi^2 = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$