O REALIZACJI KLASYCZNYCH DEGENERACJI ALGEBR JAKO DEGENERACJI SKOŃCZONYCH KATEGORII LOKALNIE OGRANICZONYCH

NA PODSTAWIE REFERATU ADAMA HAJDUKA

Przez cały referat k oznacza ustalone ciało algebraicznie domknięte.

Przypomnijmy, że jeśli $d \in \mathbb{N}$, to każdy układ $c = (c_{i,j}^l) \in k^d$ definiuje mnożenie $\circ_c : k^d \times k^d \to k^d$ dane wzorem

$$e_i \circ_c e_j := \sum_{l \in [1,n]} c_{i,j}^l \cdot e_l \qquad (i, j \in [1, n]).$$

Rozmaitością algebr wymiaru d nazywamy podzbiór alg_d przestrzeni k^{d^3} zdefiniowany wzorem

$$\mathrm{alg}_d := \{c \in k^{d^3} : \text{para } (k^d, \circ_c) \text{ jest algebrą}\}.$$

Zbiór alg_d jest lokalnie domkniętym podzbiorem przestrzeni k^d. Można pokazać, że otrzymujemy w ten sposób rozmaitość afiniczną. Na zbiorze alg_d mamy naturalne działanie grupy $\mathrm{GL}_d(k)$, którego orbity odpowiadają klasom izomorfizmu d-wymiarowych algebr. Jeśli A_0 i A_1 są d-wymiarowymi algebrami, to mówimy, że algebra A_0 jest klasyczną degeneracją algebry A_1 (i piszemy $A_1 \leq_{\mathrm{cl}} A_0$), jeśli

$$\mathrm{GL}_d * c_0 \subseteq \overline{\mathrm{GL}_d * c_1}$$

dla pewnych stałych strukturalnych c_0 i c_1 algebr A_0 i A_1, odpowiednio.

Analogicznie, dla liczby $n \in \mathbb{N}$ oraz wektora $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{n^2}$ definiujemy rozmaitość $\mathrm{lbc}_{\mathbf{d}}$ lokalnie skończonych ograniczonych k-kategorii R o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$ (tzn. $\mathrm{Ob}\, R = [1, n]$ i $\dim_k R(i, j) = d_{i,j} + \delta_{i,j}$ dla wszystkich indeksów $i, j \in [1, n]$). Na rozmaitości $\mathrm{lbc}_{\mathbf{d}}$ mamy działanie grupy $\mathrm{GL}_{\mathbf{d}} := \prod_{i,j \in [1,n]} \mathrm{GL}_{d_{i,j}}$. Przypomnijmy, że jeśli R jest lokalnie ograniczoną k-kategorią, to symbolem $A(R)$ oznaczamy stowarzyszoną algebrę. Algebrę A_0 nazywamy idempotentowo sztywną degeneracją algebry A_1 (i piszemy $A_1 \leq_{\mathrm{rig}} A_0$), jeśli istnieją liczbą $n \in \mathbb{N}$, wektor wymiaru $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{n^2}$ oraz lokalnie ograniczone skończone k-kategorie R_0 i R_1 o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$ takie, że $A(R_0) = A_0$, $A(R_1) = A_1$ i

$$\mathrm{GL}_{\mathbf{d}} * c_0 \subseteq \overline{\mathrm{GL}_{\mathbf{d}} * c_1}$$

dla pewnych stałych strukturalnych c_0 i c_1 kategorii R_0 i R_1, odpowiednio.

Data: 21.11.2010.

Mówimy, że algebra A_0 jest degeneracją w sensie Crawleya–Boeveya algebry A_1 (i piszemy, $A_1 \leq_{\mathrm{CB}} A_0$), jeśli istnieje skończenie wymiarowa algebra A, nieprzywiedlna rozmaitość X, punkt $x_0 \in X$, otwarty podzbiór $U \subseteq X$ i odwzorowania regularne $f_1, \ldots, f_r : X \to A$ takie, że $A_0 \simeq A_{x_0}$ i $A_1 \simeq A_x$ dla wszystkich punktów $x \in U$, gdzie

$$A_y := A/(f_1(y), \ldots, f_r(y)) \qquad (y \in X).$$

Wiadomo, że wszystkie powyższe typy degeneracji zachowują typ reprezentacyjny, tzn. jeśli algebra A_0 jest degeneracją algebry A_1 i algebra A_0 jest skończonego (oswojonego) typu reprezentacyjnego, to algebra A_1 jest skończonego (oswojonego, odpowiednio) typu reprezentacyjnego. Ponadto, każda idempotentowo sztywna degeneracja jest degeneracją klasyczną oraz w sensie Crawleya-Boevey. W ogólności nie ma jednak więcej inkluzji jak pokazują następujące przykłady. Algebra $k[T]/(T^2)$ jest klasyczną degeneracją algebry $k \times k$ (wystarczy rozważyć rodzinę

$$k[T]/(T^2 - t \cdot T) \qquad (t \in k)),$$

która nie jest degeneracją Crawleya-Boevey. Z drugiej strony, algebra $k(\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet)$ jest degeneracją Crawleya-Boevey algebry $k \times k$ (otrzymujemy ją rozważając rodzinę

$$k(\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet)/(t \cdot \alpha) \qquad (t \in k)),$$

która nie jest degeneracja klasyczną. Dowbor i Hajduk udowodnili, że dla algebr tego samego wymiaru każda degeneracja w sensie Crawleya-Boevey jest degeneracją klasyczną, natomiast dla algebr bazowych degeneracje Crawleya-Boevey pokrywają się z degeneracjami idempotentowo sztywnymi.

Rozważmy rodzinę

$$A_t := k(\alpha \circlearrowright \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet)/(\alpha^2 - t \cdot \alpha, t \cdot \beta) \qquad (t \in k).$$

Wtedy

$$A_0 \simeq k(\alpha \circlearrowright \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet)/(\alpha^2)$$

oraz

$$A_t \simeq k(\bullet \longrightarrow \bullet) \times k$$

dla wszystkich $t \in k \setminus \{0\}$. Z drugiej strony, algebra A_0 nie jest degeneracją algebry A_1 w żadnym z powyższych sensów.

Algebrę A_0 nazywamy uogólnioną degeneracją w sensie Crawleya-Boevey algebry A_1 (i piszemy $A_1 \leq_{\mathrm{GCB}} A_0$), jeśli istnieje rozmaitość nieprzywiedlna X, punkt $x_0 \in X$, zbiór otwarty $U \subseteq X$ i $k[X]$-algebra $\mathcal{A}$ takie, że algebra $\mathcal{A}$ jest skończenie generowana jako $k[X]$-moduł, $\mathcal{A}_{x_0} \simeq A_0$ i $\mathcal{A}_x \simeq A_1$ dla wszystkich punktów $u \in U$, gdzie

$$\mathcal{A}_y := \mathcal{A} \otimes_{k[X]} k[X]/\mathfrak{m}_y.$$

Twierdzenie (Hajduk/Kasjan). *Algebra* A_0 *jest uogólnioną degeneracją Crawleya-Boevey algebry* A_1 *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje algebra ilorazowa* $\overline{A}_0$ *algebry* A_0 *będąca klasyczna degeneracją algebry* A_1.

Wniosek. *Jeśli algebra* A_0 *jest uogólniona degeneracją Crawelya-Boevey algebry* A_1 *oraz algebra* A_0 *jest skończonego (oswojonego) typu reprezentacyjnego, to algebra* A_1 *jest skończonego (oswojonego, odpowiednio) typu reprezentacyjnego.*

Twierdzenie (Hajduk). *Jeśli algebra* A_0 *jest klasyczną degeneracją algebry* A_1, *algebry* A_0 *i* A_1 *są bazowe oraz* $\operatorname{rk} K_0(A_0) = \operatorname{rk} K_0(A_1)$, *to algebra* A_0 *jest idempotentowo sztywną degeneracją algebry* A_1.