ZWIĄZKI ROZMAITOŚCI SCHUBERTA Z REPREZENTACJAMI KOŁCZANÓW

NA PODSTAWIE REFERATU GRZEGORZA ZWARY

Przez cały referat zakładamy, że K jest ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym.

1. Rozmaitości flag

Dla liczb $n \in \mathbb{N}$ oraz $a \in [0, n]$ definiujemy rozmaitość $\operatorname{Grass}(a, n)$ jako zbiór a-wymiarowych podprzestrzeni liniowych podprzestrzeni K^n. Mamy domknięte włożenie $\operatorname{Grass}(a, n) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^a K^n)$ dane wzorem

$$V \mapsto \Lambda^a V \qquad (V \in \operatorname{Grass}(a, n)).$$

Zauważmy, że

$$|\operatorname{Grass}(0, n)| = 1 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Grass}(1, n) \simeq \mathbb{P}(K^n)$$

dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $a \in [0, n]$, to

$$\operatorname{Grass}(n - a, n) \simeq \operatorname{Grass}(a, n).$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i $a \in [0, n]$. Mnożenie $\operatorname{GL}(n) \times K^n \to K^n$ indukuje tranzytywne działanie grupy $\operatorname{GL}(n)$ na rozmaitości $\operatorname{Grass}(a, n)$. Dla $k \in [0, n]$ definiujemy podprzestrzeń $E_k \subseteq K^n$ wzorem

$$E_k := \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_k).$$

Wtedy

$$\operatorname{Stab}(E_a) = P(a, n - a),$$

gdzie dla ciągu $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{N}$ takiego, że $a_1 + \ldots + a_m = n$ definiujemy grupę $P(a_1, \ldots, a_m)$ jako zbiór macierzy $g \in \operatorname{GL}(n)$ takich, że $g(i, j) = 0$ dla wszystkich $i, j \in [1, n]$ takich, że istnieje indeks $l \in [1, m]$ taki, że

$$j \leq a_1 + \cdots + a_l < i.$$

Zatem

$$\operatorname{Grass}(a, n) \simeq \operatorname{GL}(n)/P(a, n - a).$$

Z drugiej strony, niech $\operatorname{Mono}(a, n)$ będzie zbiorem $n \times a$-macierzy rzędu a. Mamy działanie grupy $\operatorname{GL}(a)$ na rozmaitości $\operatorname{Mono}(a, n)$ dane wzorem

$$g * f := f \circ g^{-1} \qquad (g \in \operatorname{GL}(a),\ f \in \operatorname{Mono}(a, n)).$$

To działanie jest wolne i

$$\operatorname{Mono}(a, n)/\operatorname{GL}(a) \simeq \operatorname{Grass}(a, n).$$

Data: 23.11.2010.

Ponadto, złożenie

$$\mathrm{Mono}(a,n) \twoheadrightarrow \mathrm{Grass}(a,n) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^a K^n)$$

jest dane wzorem

$$f \mapsto (\det f_I)_{\substack{I\subseteq[1,n]\\ |I|=a}}.$$

Dla przykładu, obrazem włożenia $\mathrm{Grass}(2,4) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^2 K^4)$ jest hiperpowierzchnia zadana przez równanie

$$X_{1,2}\cdot X_{3,4} - X_{1,3}\cdot X_{2,4} + X_{1,4}\cdot X_{2,3} = 0.$$

Ustalmy teraz liczbę $n \in \mathbb{N}$ oraz ciąg $(a_1,\dots,a_b) \in \mathbb{N}$ taki, że $a_i \leq a_{i+1}$ dla każdego indeksu $i \in [1, b-1]$ i $a_b = n$. Definiujemy zbiór $\mathrm{Flag}(a_1,\dots,a_b)$ jako zbiór wszystkich ciągów $(V_1,\dots,V_b)$ przestrzeni liniowych takich, że $\dim V_i = a_i$ dla każdego indeksu $i \in [1,b]$, $V_i \subseteq V_{i+1}$ dla każdego indeksu $i \in [1,b-1]$ oraz $V_b = K^n$. Jest to podzbiór domknięty w produkcie

$$\mathrm{Grass}(a_1,n) \times \cdots \times \mathrm{Grass}(a_b,n),$$

zatem jest to rozmaitość rzutowa. Grupa $\mathrm{GL}(n)$ działa tranzytywnie na rozmaitości $\mathrm{Flag}(a_1,\dots,a_b)$. Jeśli

$$E := (E_{a_1},\dots,E_{a_1+\cdots+a_b}),$$

to $\mathrm{Stab}\, E = P(a_1,\dots,a_b)$, a więc

$$\mathrm{Flag}(a_1,\dots,a_n) \simeq \mathrm{GL}(n)/P(a_1,\dots,a_b).$$

Niech

$$B(n) := P(1,\dots,n).$$

W rozmaitości $\mathrm{Flag}(a_1,\dots,a_n)$ mamy skończenie wiele $B(n)$-orbit, których domknięcia nazywamy rozmaitościami Schuberta.

Dla przykładu, jeśli $n \in \mathbb{N}$, to w rozmaitości $\mathbb{P}(K^n)$ mamy n $B(n)$-orbit: dla każdej liczby $k \in [1,n]$ zbiór

$$X_k := \{x \in \mathbb{P}(K^n) \\ : x_k \neq 0 \text{ i } x_i = 0 \text{ dla każdego indeksu } i \in [k+1,n]\}$$

jest $B(n)$-orbitą. Ponadto, jeśli $k,l \in [1,n]$, to $X_k \subseteq \overline{X_l}$ wtedy i tylko wtedy $k \leq l$. W rozmaitości $\mathrm{Grass}(2,4)$ mamy 6 $B(4)$-orbit. Dla każdej pray $(k,l) \in [1,4]$ takiej, że $k < l$ niech $Y_{k,l}$ będzie $B(4)$-orbitą przestrzeni $\mathrm{span}(e_k, e_l)$. Wszystkie $B(4)$-orbity w rozmaitości $\mathrm{Grass}(2,4)$ są tej postaci. Jeśli $k,l,p,q \in [1,4]$, $k<l$ i $p<q$, to $Y_{k,l} \subseteq \overline{Y_{p,q}}$ wtedy i tylko wtedy $k \leq p$ i $l \leq q$. Wreszcie, przy działaniu grupy $B(n)$ na rozmaitości $\mathrm{Flag}(1,\dots,n)$ mamy $n!$ orbit.

2. Reprezentacje kołczanu Dynkina typu $\mathbb{A}$

Ustalmy liczbę $n \in \mathbb{N}$ i niech Q będzie następującym kołczanem

$$\underset{1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_1} \underset{2}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{n-1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_n} \underset{n}{\bullet} .$$

Ustalmy wektor wymiaru $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$. Dla reprezentacji $V \in \mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})$ oraz $k, l \in [1, n]$ definiujemy macierz $V_{k,l}$ wzorem

$$V_{k,l} := \begin{cases} V_{\alpha_{l-1}} \cdots V_{\alpha_k} & k < l, \\ \mathrm{Id}_{K^k} & k = l, \\ 0 & k > l. \end{cases}$$

Definiujemy odwzorowanie $\Phi : \mathrm{rep}_Q(\mathbf{d}) \to \mathrm{GL}(q)$, gdzie $q := d_1 + \cdots + d_n$, wzorem

$$\Phi(V)(d_1 + \ldots + d_{l-1} + i, d_1 + \ldots + d_{k-1} + j) := V_{k,l}(i, j)$$
$$(k, l \in [1, n],\ i \in [1, d_l],\ j \in [1, d_k]).$$

Zelevinsky pokazał, że odwzorowanie Φ indukuje odwzorowanie

$$\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d}) \to \mathrm{GL}(q)/P(d_1, \ldots, d_n) \simeq \mathrm{Flag}(d_1, \ldots, d_n).$$

Dla kołczanu Q i wektora wymiaru $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ definiujemy rozmaitość mono-$\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})$ jako otwarty podzbiór rozmaitości $\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})$ złożony z tych V, dla których $\mathrm{rk}\, V_\alpha = d_{s\alpha}$ dla każdej strzałki $\alpha \in Q_1$. Jeśli $n \in \mathbb{N}$,

$$Q := (\underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{2}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet})$$

i $\mathbf{d} := (1, \ldots, n)$, to grupa $\mathrm{GL}(\mathbf{d})$ działa tranzytywnie na rozmaitości mono-$\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})$. Ponadto, jeśli odwzorowanie $\varphi : B(n) \to \mathrm{GL}(\mathbf{d})$ dane jest wzorem

$$(\varphi(g))_k(i, j) := g(i, j) \qquad (k \in [1, n],\ i, j \in [1, k]),$$

to

$$\text{mono-}\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d}) \simeq \mathrm{GL}(\mathbf{d})/B(n).$$

Z drugiej strony, jeśli $n \in \mathbb{N}$,

$$Q := (\underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{2}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet})$$

i $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$, przy czym $d_i \leq d_{i+1}$ dla każdego indeksu $i \in [1, n-1]$, to grupa

$$H := \mathrm{GL}(d_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(d_{n-1})$$

działa w sposób wolny na rozmaitości mono-$\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})$ i

$$\text{mono-}\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})/H \simeq \mathrm{Flag}(d_1, \ldots, d_n).$$

Ustalmy teraz liczbę $n \in \mathbb{N}$ oraz ciąg $(a_1, \ldots, a_b) \in \mathbb{N}$ taki, że $a_i \leq a_{i+1}$ dla każdego indeksu $i \in [1, b-1]$ i $a_b = n$. Jeśli Q jest następującym kołczanem

$$\underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{2}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n=b'}{\bullet} \longleftarrow \underset{(b-1)'}{\bullet} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \underset{2'}{\bullet} \longleftarrow \underset{1'}{\bullet}$$

i

$$\mathbf{d} := (1, 2, \dots, n-1, n = a_b, a_{b-1}, \dots, a_2, a_1),$$

to $\mathrm{GL}(\mathbf{d})$-orbity w rozmaitości mono-$\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})$ pozostają w bijekcji z $B(n)$-orbitami w rozmaitości $\mathrm{Flag}(a_1, \dots, a_b)$.

Podobnie, jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $a, b \in [0, n]$, to istnieje bijekcja pomiędzy $B(n)$-orbitami w produkcie $\mathrm{Grass}(a, n) \times \mathrm{Grass}(b, n)$ oraz $\mathrm{GL}(\mathbf{d})$ orbitami w rozmaitości mono-$\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})$, gdzie

$$Q := \left(\begin{tikzcd} & & & & \underset{a'}{\bullet} \arrow[dl] \\ \underset{1}{\bullet} \arrow[r] & \underset{2}{\bullet} \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r] & \underset{n-1}{\bullet} \arrow[r] & \underset{n}{\bullet} \\ & & & & \underset{b''}{\bullet} \arrow[ul] \end{tikzcd} \right)$$

oraz $\mathbf{d} := (1, 2, \dots, n-1, n, a, b)$.

3. Afiniczne rozmaitości Schuberta i nilpotentne reprezentacje cyklu

Przez cały paragraf n będzie ustalona liczba naturalną. Niech

$$A := K[[t]] \qquad \text{i} \qquad F := K((t)).$$

Kratą w przestrzeni F^n nazywamy każdy zbiór postaci

$$A \cdot v_1 \oplus \cdots \oplus A \cdot v_n,$$

gdzie ciąg $(v_1, \dots, v_n)$ jest bazą przestrzeni F^n. Dla ciągu $(d_1, \dots, d_h)$ takiego, że $d_1 + \ldots + d_h = n$, definiujemy zbiór $\mathrm{Fl}(d_1, \dots, d_h)$ jako zbiór wszystkich ciągów $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_h)$ krat w przestrzeni F^n takich, że

$$\Lambda_{i+1} \subseteq \Lambda_i \qquad \text{i} \qquad \dim_K \Lambda_i / \Lambda_{i+1} = d_i$$

dla każdego indeksu $i \in [1, h]$, gdzie $\Lambda_{h+1} := t \cdot \Lambda_1$. Niech B będzie grupą wszystkich $n \times n$-macierzy g o współczynnikach w pierścieniu A takich, że $(\det g)(0) \neq 0$ i $g(i,j) \in t \cdot A$ dla wszystkich indeksów $i, j \in [1, n]$, $i < j$. Wtedy B-orbity w rozmaitości $\mathrm{Fl}(d_1, \dots, d_h)$ oraz ich domknięcia (które nazywamy afinicznymi rozmaitościami Schuberta) można traktować jako rozmaitości quasi-rzutowe i rzutowe, odpowiednio. Istotnie, jeśli $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_h) \in \mathrm{Fl}(d_1, \dots, d_h)$, to istnieją liczby $i, j \in \mathbb{Z}$ takie, że

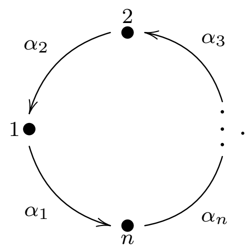
$$\Lambda_1 \subseteq E_i \qquad \text{i} \qquad t \cdot \Lambda_1 \supseteq E_j,$$

gdzie dla liczby $k \in \mathbb{Z}$ definiujemy

$$E_k := A \cdot e_k \oplus \cdots \oplus A \cdot e_{k+(n-1)},$$

przy czym $e_{l+n \cdot c} := t^c \cdot e_l$ dla $l \in [1, n]$ i $c \in \mathbb{Z}$.

Niech teraz Q będzie kołczanem



i niech $\mathrm{rep}^0_Q(\mathbf{d})$ będzie rozmaitością reprezentacji nilpotentnych kołczanu Q. Dla reprezentacji $V \in \mathrm{rep}^0_Q(\mathbf{d})$ definiujemy $n \times n$-macierz $\tilde{V}$ o wzorem

$$
\begin{aligned}
&\tilde{V}(d_1 + \ldots + d_{l-1} + i, d_2 + \ldots + d_{k-1} + j) \\
&\qquad := \begin{cases} V_{\alpha_{k+1}}(i,j) & l = k-1, \\ t^{-1} \cdot V_{\alpha_1}(i,j) & l = n-1 \text{ i } k = 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \\
&\qquad\qquad (k, l \in [1,n],\ i \in [1, d_l],\ j \in [1, d_k]).
\end{aligned}
$$

Wtedy macierz $\tilde{V}$ jest nilpotentna, zatem następujące odwzorowanie

$$
\mathrm{rep}^0_Q(\mathbf{d}) \ni V \mapsto \frac{t^{n-1}}{1-\tilde{V}} \cdot (E_1, E_{1+d_1}, \ldots, E_{1+d_1+\ldots+d_{h-1}}) \in \mathrm{Fl}(d_1, \ldots, d_h),
$$

pochodzące od Lusztiga, jest poprawnie zdefiniowane.