O DWÓCH OPERACJACH ZACHOWUJĄCYCH ALGEBRAICZNĄ ZWARTOŚĆ MODUŁU

NA PODSTAWIE REFERATU STANISŁAWA KASJANA

Niech R będzie pierścieniem. Macierz $r \in \mathbb{M}_{I\times J}(R)$ nazywamy wierszowo skończoną, jeśli

$$\#\{j \in J : r(i,j) \neq 0\} \neq 0$$

dla każdego indeksu $i \in I$. Dla wierszowo skończonej macierzy $r \in \mathbb{M}_{I\times J}(R)$ oraz ciągu $v \in V^I$ elementów R-modułu V oznaczamy przez $\mathcal{S}(r,v)$ zbiór wszystkich ciągów $x \in V^J$ takich, że

$$\sum_{j\in J} r(i,j)\cdot x(j) = v(i)$$

dla każdego indeksu $i \in I$. Moduł V nazywamy algebraicznie zwartym, jeśli dla każdej wierszowo skończonej macierzy $r \in \mathbb{M}_{I\times J}(R)$ oraz każdego ciągu $v \in V^I$ z faktu, że $\mathcal{S}(r|_{I_0\times J}, v) \neq \varnothing$ dla każdego skończonego podzbioru $I_0 \subseteq I$ wynika, że $\mathcal{S}(r,v) \neq \varnothing$.

Wiadomo, że jeśli K jest ciałem i R jest K-algebrą, to każdy moduł postaci $\operatorname{Hom}_K(W,K)$ dla pewnego prawego R-modułu W jest algebraicznie zwarty. W szczególności każdy skończenie wymiarowy R-moduł jest algebraicznie zwarty. Jeśli $\dim R < \infty$, to algebra R jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie R-moduły są algebraicznie zwarte. Z drugiej strony, $K[T]$ nie jest algebraicznie zwartym $K[T]$-modułem.

Niech K będzie ustalonym ciałem. Dla źródła x w kołczanie Q oznaczmy przez $\sigma_x Q$ BGP-odbicie kołczanu Q w wierzchołku x, zaś przez S_x stowarzyszony funktor $\operatorname{mod} KQ \to \operatorname{mod} K\sigma_x Q$.

Twierdzenie. *Jeśli x jest źródłem w kołczanie Q, to V jest algebraicznie zwartym KQ-modułem wtedy i tylko wtedy, gdy $S_x V$ jest algebraicznie zwartym $K\sigma_x Q$-modułem.*

Twierdzenie. *Niech A i B będą K-algebrami takimi, że istnieje homomorfizm algebr $B \to K$. Jeśli M jest B-A-bimodułem, który jest skończenie generowany i projektywny jako prawy A-moduł, i A-moduł V jest algebraicznie zwarty, to moduł $M \otimes_B V$ jest algebraicznie zwarty.*

Data: 25.11.2010.