ALGEBRY OKRESOWE POWIERZCHNI RZECZYWISTYCH

NA POSTAWIE REFERATU ANDRZEJA SKOWROŃSKIEGO

Moduł M nad algebrą A nazywamy *okresowym*, jeśli istnieje $d > 0$ takie, że $\Omega_A^d(M) \simeq M$. W powyższej sytuacji minimalne d o tej własności nazywamy *okresem* modułu M. Algebra A jest *okresowa*, jeśli jest okresowa jako A-A-bimoduł, tzn. jako moduł nad algebrą obejmującą. Jeśli algebra jest okresowa, to jest *okresem* jest jej okres jako bimodułu. Wiadomo, że jeśli algebra A jest okresowa o okresie d, to $\Omega_A^d(M) \simeq M$ dla każdego A-modułu M bez projektywnych składników prostych. Istnieje hipoteza mówiąca, że okresowość modułów prostych implikuje okresowość algebry. Wiadomo, że okresowość modułów prostych implikuje, iż algebra jest samoinjektywna.

Obiektem zainteresowania w pracy będą okresowe algebry symetryczne nieskończonego typu. Przypomnijmy, że algebra A jest *symetryczna*, o ile istnieje niezdegenerowana symetryczna łączna forma dwuliniowa $(-,-)\colon A \times A \to K$, lub równoważnie bimoduły A i $D(A) := \operatorname{Hom}_K(A, K)$ są izomorficzne. Każda algebra A jest ilorazem algebry symetrycznej $T(A) := A \ltimes D(A)$, gdzie odpowiednia forma zdefiniowana jest wzorem

$$((a, \varphi), (b, \psi)) := \varphi(b) + \psi(a) \qquad (a, b \in A, \varphi, \psi \in D(A)).$$

Okresowe algebry symetryczne wielomianowego wzrostu zostały sklasyfikowane. Są one albo postaci $T(B)^G = T(B)/G$, gdzie B jest algebrą odwróconą typu Dynkina lub algebrą tubularną, natomiast G jest skończoną grupą cykliczną działającą w sposób wolny na $T(B)$, albo są cokołowymi deformacjami powyższych algebr w przypadku ciał K charakterystyki równej 2 lub 3.

Jeśli A jest bazową nierozkładalną algebrą symetryczną nieskończonego typu, to wiadomo, że:

- algebra A ma okres co najmniej 3;
- jeśli algebra A ma okres 3, to charakterystyka ciała K jest równa 2;
- jeśli algebra A jest oswojona i ma okres 3, to A jest algebrą preprojektywną typu $\mathbb{D}_4$;
- jeśli algebra A ma okres 4, to proste A-moduły mają okres 4.

Mówimy, że algebra A jest *uogólnionego typu kwaternionowego*, o ile

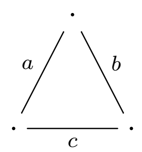
Data: 12.03.2019 i 19.03.2019.

(1) algebra A jest symetryczna, nierozkładalna i nieskończonego typu, oraz
(2) proste A-moduły są okresowe o okresie 4.

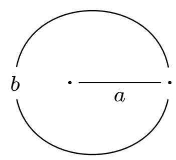
Jeśli dodatkowo macierz Cartana jest nieosobliwa, to mówimy, że algebra jest *typu kwaternionowego*. Celem projektu jest opis algebr bazowych uogólnionego typu kwaternionowego oraz pokazanie, że są one okresowe o okresie 4.

Kołczan Q nazywamy 2-*regularnym*, jeśli w każdym wierzchołku zaczynają się i kończą się dwie strzałki. *Kołczanem triangulowalnym* (Q, f) nazywamy kołczan 2-regularny Q wraz z permutacją $f\colon Q_1 \to Q_1$ taką, że $f^3 = \mathrm{Id}_{Q_1}$ oraz $s(f(\alpha)) = t(\alpha)$ dla każdej strzałki α. Każdy kołczan triangulowalny można otrzymać z powierzchni z triangulacją w następujący sposób:

- strzałkami kołczanu są krawędzie triangulacji;
- jeśli



  jest trójkątem zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, to mamy strzałki
  $$\alpha\colon a \to b, \qquad \beta\colon b \to c \qquad \text{i} \qquad \gamma\colon c \to a$$
  takie, że $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \gamma$ i $f(\gamma) = \alpha$;
- jeśli



  jest trójkątem samozagiętym, to mamy strzałki
  $$\alpha\colon a \to a, \qquad \beta\colon a \to b \qquad \text{i} \qquad \gamma\colon b \to a$$
  takie, że $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \gamma$ i $f(\gamma) = \alpha$;
- jeśli a jest krawędzią brzegową, to mamy strzałkę $\alpha\colon a \to a$ taką, że $f(\alpha) = \alpha$.

W szczególności, jeśli (Q, f) jest kołczanem triangulowalnym, to strzałkę α taką, że $f(\alpha) = \alpha$, nazywamy *strzałką brzegową*.

Jeśli (Q, f) jest kołczanem triangulowalnym, to dla każdej strzałki α definiujemy strzałkę $\overline{\alpha}$ poprzez warunki $s(\overline{\alpha}) = s(\alpha)$ i $\overline{\alpha} \neq \alpha$. Niech $g(\alpha) := \overline{f(\alpha)}$, $\alpha \in Q_1$, i oznaczmy przez n_α liczbę elementów g-orbity strzałki α. Ustalmy dwie g-niezmiennicze funkcje $m\colon Q_1 \to \mathbb{N}_+$ i $c\colon Q_1 \to K^\times$, przy czym zakładamy, że $n_\alpha m_\alpha \geq 2$ dla każdej strzałki

α. Strzałkę α nazywamy *wirtualną*, jeśli $n_\alpha m_\alpha = 2$. Zakładamy dodatkowo, że

(1) $n_\alpha m_\alpha \geq 3$, jeśli strzałka $\overline{\alpha}$ jest wirtualna, ale nie jest pętla, oraz
(2) $n_\alpha m_\alpha \geq 4$, jeśli strzałka $\overline{\alpha}$ jest wirtualna i jest pętla.

Przez $\Lambda = \Lambda(Q, f, c, m)$ oznaczamy algebrę dróg kołczanu Q ograniczonego przez relacje

(1) $f(\alpha)\alpha - c_{\overline{\alpha}} A_{\overline{\alpha}}$ dla każdej strzałki α, gdzie

$$A_\beta := g^{n_\beta m_\beta - 2}(\beta) \cdots g(\beta)\beta$$

dla $\beta \in Q_1$;
(2) $g(f(\alpha))f(\alpha)\alpha$ dla każdej strzałki α takiej, że strzałka $f^2(\alpha)$ nie jest wirtualna;
(3) $f(g(\alpha))g(\alpha)\alpha$ dla każdej strzałki α takiej, że strzałka $f(\alpha)$ nie jest wirtualna.

Kołczan Q jest kołczanem Gabriela Q_Λ algebry Λ wtedy i tylko wtedy, gdy $n_\alpha m_\alpha \geq 3$ dla każdej strzałki α. Dokładniej, kołczan Q_Λ powstaje z kołczanu Q przez usunięcie strzałek wirtualnych. Podobnie, przez $B(Q, f, m, c)$ oznaczamy algebrę dróg kołczanu Q ograniczoną przez relacje $f(\alpha)\alpha$ i $c_\alpha B_\alpha - \overline{\alpha} B_{\overline{\alpha}}$ dla każdej strzałki α, gdzie

$$B_\beta := g^{n_\beta m_\beta - 1}(\beta) g^{n_\beta m_\beta - 2}(\beta) \cdots g(\beta)\beta$$

dla $\beta \in Q_1$.

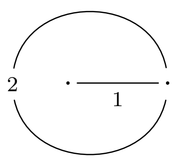
Zdefiniujemy teraz kilka wyjątkowych klas algebr. Niech Q będzie kołczanem

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & 2 \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

wraz z permutacją

$$f(\alpha) := \beta, \qquad f(\beta) := \gamma, \qquad f(\gamma) := \alpha, \qquad f(\sigma) := \sigma.$$

Innymi słowy, jest to kołczan pochodzący od następującej triangulacji dysku:

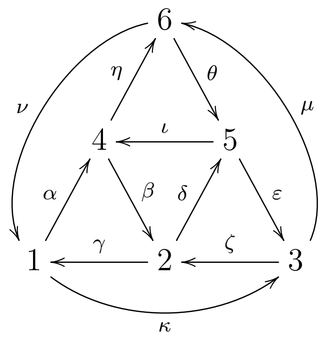


Jeśli $\lambda \in K^\times$,

$$m_\alpha := 3 \qquad \text{i} \qquad c_\alpha := \lambda,$$

oraz $m_\omega := 1$ i $c_\omega := 1$ dla pozostałych strzałek ω, to algebrę $D(\lambda) := \Lambda(Q, f, m, c)$ nazywamy *algebrą dysku*.

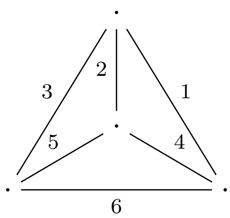
Niech teraz Q będzie kołczanem



wraz z permutacją

$$
\begin{array}{lll}
f(\alpha) := \beta, & f(\beta) := \gamma, & f(\gamma) := \alpha, \\
f(\delta) := \varepsilon, & f(\varepsilon) := \zeta, & f(\zeta) := \delta, \\
f(\eta) := \theta, & f(\theta) := \iota, & f(\iota) := \eta, \\
f(\kappa) := \mu, & f(\mu) := \nu, & f(\nu) := \kappa.
\end{array}
$$

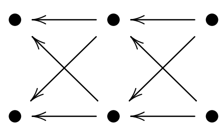
Innymi słowy, jest to kołczan pochodzący od następującej standardowej triangulacji czworościanu:



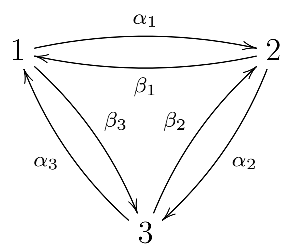
Jeśli $\lambda \in K^{\times}$, $m_\omega := 1$ dla każdej strzałki ω,

$$c_\beta := c_\delta := c_\iota := \lambda,$$

oraz $c_\omega := 1$ dla pozostałych strzałek ω, to algebrę $\Lambda(\lambda) := \Lambda(Q, f, m, c)$ nazywamy *algebrą czworościanu*. Zauważmy, że $D(\lambda) = \Lambda(\lambda)/\mathbb{Z}_3$. Ponadto, dla $\lambda \neq 1$, $\Lambda(\lambda)$ jest trywialnym rozszerzeniem algebry tubularnej typu $(2, 2, 2, 2)$, której kołczan Gabriela ma postać



Niech teraz Q będzie kołczanem



wraz z permutacją

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) &:= \alpha_2, & f(\alpha_2) &:= \alpha_3, & f(\alpha_3) &:= \alpha_1, \\ f(\beta_1) &:= \beta_3, & f(\beta_2) &:= \beta_1, & f(\beta_3) &:= \beta_2. \end{aligned}$$

Jest to kołczan pochodzący od triangulacji sfery dwoma trójkątami. Jeśli $\lambda \in K^\times$,

$$\begin{aligned} m_{\alpha_1} &:= 2, & m_{\alpha_2} &:= 2, & m_{\alpha_3} &:= 1, \\ m_{\beta_1} &:= 2, & m_{\beta_2} &:= 2, & m_{\beta_3} &:= 1, \\ c_{\alpha_1} &:= \lambda, & m_{\alpha_2} &:= 1, & m_{\alpha_3} &:= 1, \\ c_{\beta_1} &:= \lambda, & c_{\beta_2} &:= 1, & c_{\beta_3} &:= 1, \end{aligned}$$

to algebrę $T(\lambda) := \Lambda(Q, f, m, c)$ nazywamy *algebrą trójkątną*.

Algebry trójkątne można zdefiniować również w inny sposób. Niech Q będzie kołczanem

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & 2 \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend left, "\sigma"] & 3 \arrow[l, bend left, "\delta"] \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd}$$

wraz z permutacją

$$\begin{aligned} f(\alpha) &:= \beta, & f(\beta) &:= \gamma, & f(\gamma) &:= \alpha, \\ f(\sigma) &:= \eta, & f(\eta) &:= \delta, & f(\delta) &:= \sigma. \end{aligned}$$

Jeśli $\lambda \in K^\times$,

$$m_\alpha := 2 =: m_\eta \qquad \text{i} \qquad c_\alpha := 1 =: c_\eta,$$

oraz $m_\omega := 1$ i $c_\omega := \lambda$ dla pozostałych strzałek ω, to

$$\Lambda(Q, f, m, c) \simeq T(\lambda^{-2}).$$

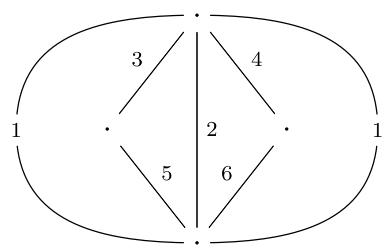
Na zakończenie niech Q będzie kołczanem

$$\begin{tikzcd} & & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[drr, bend left, "\delta"] & & \\ 5 \arrow[urr, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\theta"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[dr, "\iota"'] & & 4 \arrow[ul, "\zeta"'] \arrow[r, bend right, "\mu"'] & 6 \arrow[l, bend right, "\varepsilon"'] \arrow[dll, bend left, "\nu"] \\ & & 2 \arrow[ull, bend left, "\eta"] \arrow[ur, "\kappa"'] & & \end{tikzcd}$$

wraz z permutacją

$$\begin{aligned} f(\alpha) &:= \beta, & f(\beta) &:= \gamma, & f(\gamma) &:= \alpha, \\ f(\delta) &:= \varepsilon, & f(\varepsilon) &:= \zeta, & f(\zeta) &:= \delta, \\ f(\eta) &:= \theta, & f(\theta) &:= \iota, & f(\iota) &:= \eta, \\ f(\kappa) &:= \mu, & f(\mu) &:= \nu, & f(\nu) &:= \kappa. \end{aligned}$$

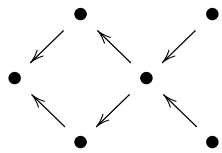
Innymi słowy, jest to kołczan pochodzący od następującej triangulacji sfery:



Jeśli $\lambda \in K^{\times}$, $m_\omega := 1$ dla każdej strzałki ω,

$$c_\alpha := c_\zeta := c_\iota := c_\kappa := \lambda,$$

oraz $c_\omega := 1$ dla pozostałych strzałek ω, to algebrę $S(\lambda) := \Lambda(Q, f, m, c)$ nazywamy *algebrą sferyczną*. Zauważmy, że $T(\lambda) = S(\lambda)/\mathbb{Z}_2$. Ponadto, dla $\lambda \neq 1$, $S(\lambda)$ jest trywialnym rozszerzeniem algebry tubularnej typu $(2, 2, 2, 2)$, której kołczan Gabriela ma postać



W poniższych twierdzenia $\Lambda = \Lambda(Q, f, m, c)$ dla pewnych Q, f, m i c.

Twierdzenie 1. *Wymiar algebry Λ jest równy $\sum_{\alpha \in Q_1} n_\alpha m_\alpha$. Ponadto algebra Λ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\Lambda \not\simeq T(1), S(1)$.*

Twierdzenie 2. *Jeśli $\Lambda \not\simeq D(\lambda), T(\lambda), \Lambda(\lambda), S(\lambda)$, $\lambda \in K^{\times}$, to Λ degeneruje się do $B(Q, f, m, c)$ i jest algebrą oswojoną niewielomianowego wzrostu.*

Twierdzenie 3. *Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Proste Λ-moduły są okresowe o okresie* 4.
(2) *Algebra Λ jest okresowa o okresie* 4.
(3) $\Lambda \not\simeq D(1), T(1), \Lambda(1), S(1)$.

Algebrę A nazywamy 2-*regularną*, jeśli jej kołczan Gabriela jest 2-regularny. W poniższych twierdzeniach A jest bazową algebrą 2-regularną z co najmniej 3 prostymi modułami.

Twierdzenie. *Jeśli A jest uogólnioną algebrą typu kwaternionowego, to istnieję kołczan triangulowalny (Q, f) oraz minimalny zbiór relacji R takie, że $A \simeq KQ/\langle R \rangle$ oraz dla każdej strzałki $\alpha \in Q_1$ istnieje relacja $\rho_\alpha \in R$ taka, że*

$$\rho_\alpha + I_\alpha = f(\alpha)\alpha + I_\alpha,$$

gdzie I_α jest ideałem algebry KQ generowanym przez drogi długości 2 *różne od drogi $f(\alpha)\alpha$.*

Twierdzenie. *Algebra A jest uogólnioną algebrą typu kwaternionowego wtedy i tylko wtedy, gdy jest algebrą okresową o okresie* 4. *Ponadto w powyższej sytuacji algebra A jest izomorficzna z jedną z następujących algebr:*

(1) *algebrą postaci $\Lambda(Q, f, m, c)$ taką, że $n_\alpha m_\alpha > 2$ dla każdej strzałki α, różną od $\Lambda(1)$;*
(2) *cokołową deformacją algebry z punktu* (1), *o ile charakterystka ciała K jest równa* 2 *i kołczan Q zawiera strzałki brzegowe;*
(3) *nieosobliwą wyższą algebrą czworościanu.*