ALGEBRY OKRESOWE OSOBLIWOŚCI KRZYWYCH

NA POSTAWIE REFERATU ANDRZEJA SKOWROŃSKIEGO

Przez cały referat zakładamy, że K jest ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym, $S := K[[x, y]]$, $\mathfrak{m} := (x, y)$, $f \in \mathfrak{m}^2 \setminus 0$ i $R := S/(f)$. Pierścień R nazywamy osobliwością krzywej. Ponadto zakładamy, że $f = f_1 \cdots f_{n+1}$ dla szeregów nierozkładalnych $f_1, \ldots, f_{n+1}$, przy czym $(f_i) \neq (f_j)$ dla $i \neq j$. Wtedy pierścień R jest zredukowany oraz pierścień $R_\mathfrak{p}$ jest regularny dla każdego ideały pierwszego $\mathfrak{p} \subseteq R$ różnego od $\mathfrak{m}/(f)$ (tzn. R jest osobliwością izolowaną). Ponadto $R \simeq S/(F)$ dla pewnego wielomianu $F \in K[x, y]$ oraz $(0, 0)$ jest punktem osobliwym krzywej $\{(a, b) \in K^2 \mid F(a, b) = 0\}$.

Ponieważ $\dim(R) = 1$, więc skończenie generowany R-moduł M jest (maksymalnym) modułem Cohen–Macaulaya wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Hom}_R(K, M) = 0$. Kategoria $\mathrm{CM}(R)$ modułów Cohen–Macaulaya jest kategorią Frobeniusa oraz $\Omega_R(M) \in \mathrm{CM}(R)$ dla każdego $M \in \mathrm{CM}(R)$. Ponieważ R jest osobliwością izolowaną, więc kategoria $\mathrm{CM}(R)$ posiada ciągi prawie rozszczepialne, przy czym $\tau_R = \Omega_R$. Wiadomo również, że $\Omega^2(M) \simeq M$ dla każdego $M \in \mathrm{CM}(R)$ bez wolnych składników prostych.

W konsekwencji powyższych faktów otrzymujemy, że kategoria stabilna $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ jest Hom-skończoną kategorią triangulowalną, w której funktorem przesunięcią Σ jest funktor odwrotny do Ω_R. Zauważmy jednak, że $\Omega_R^2 = \mathrm{Id}_{\underline{\mathrm{CM}}(R)}$, więc $\Sigma = \Omega_R$. Łatwo pokazać, że kategoria $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ jest kategorią 2-Calabi–Yau. Obiekt $M \in \underline{\mathrm{CM}}(R)$ nazywamy klastrowo odwracającym, jeśli

$$\mathrm{add}(M) = \{X \in \underline{\mathrm{CM}}(R) \mid \mathrm{Ext}^1_R(M, X) = 0\}.$$

Ponieważ kategoria $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ jest 2-Calabi–Yau, więc

$$\{X \in \underline{\mathrm{CM}}(R) \mid \mathrm{Ext}^1_R(M, X) = 0\} = \{X \in \underline{\mathrm{CM}}(R) \mid \mathrm{Ext}^1_R(X, M) = 0\}.$$

Z powyższej definicji wynika, że jeśli $M \in \underline{\mathrm{CM}}(R)$ jest obiektem klastrowo odwracającym, to $\mathrm{Ext}^1_R(M, M) = 0$. Wiadomo, że jeśli $R' = K[[x, y, z]]/(f)$ jest osobliwością hiperpowierzchni, to

$$\mathrm{Ext}^1_T(M, M) = D\,\underline{\mathrm{Hom}}(M, \tau M) = D\,\underline{\mathrm{Hom}}(M, M) \neq 0$$

dla każdego niezerowego $M \in \underline{\mathrm{CM}}(R')$, gdyż równość $\dim R' = 2$ implikuje, że $\tau = \mathrm{Id}$. W szczególności, w kategorii $\underline{\mathrm{CM}}(R')$ nie istnieją obiekty klastrowo odwracające.

Data: 26.03.2019.

Przez resztę referatu $T_i := S/(f_1 \cdots f_i)$, $1 \le i \le n$, $T := \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ oraz $B := \underline{\mathrm{End}}_R(T)$. Ponadto zakładamy, że $f_1, \ldots, f_{n+1} \notin \mathfrak{m}^2$.

Twierdzenie (Buan/Iyama/Keller/Reiten)**.**

(1) *T jest obiektem klastrowo odwracającym w $\underline{\mathrm{CM}}(R)$.*
(2) *B jest skończenie wymiarową algebrą symetryczną.*
(3) *Każdy nieprojektywny B-moduł nierozkładalny jest okresowy o okresie* 4.
(4) *Kołczan Gabriel Q_B algebry B jest podkołczanem kołczanu*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] \arrow[r, shift left] & 2 \arrow[loop above] \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & 3 \arrow[loop above] \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & \cdots \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & n \arrow[loop above] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

zawierającym kołczan

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left] & 2 \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & 3 \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & \cdots \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & n \arrow[l, shift left] \end{tikzcd},$$

przy czym w wierzchołku i jest pętla wtedy i tylko wtedy, gdy $(f_i, f_{i+1}) \neq \mathfrak{m}$.

Twierdzenie (Dugas)**.** *B jest algebrą okresową o okresie* 4.

Dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_{n+1}$ zbioru $\{1, \ldots, n+1\}$ definiujemy $T_i^\sigma := S/(f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(i)})$, $1 \le i \le n$, $T^\sigma := \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ oraz $B^\sigma := \underline{\mathrm{End}}_R(T^\sigma)$.

Twierdzenie (Buan/Iyama/Keller/Reiten)**.**

(1) *T^σ, $\sigma \in S_{n+1}$, są wszystkimi bazowymi obiektami klastrowo odwracającymi w $\underline{\mathrm{CM}}(R)$.*
(2) *Dla każdej permutacji $\sigma \in S_{n+1}$ algebry B i B^σ są pochodnie równoważne.*

Pokażemy teraz, że jeśli szeregi $f_1, \ldots, f_{n+1}$ spełniają warunki:

(1) $(f_1, f_2) \neq \mathfrak{m} \neq (f_n, f_{n+1})$,
(2) $(f_i, f_{i+1}) = \mathfrak{m}$, dla $i = 2, \ldots, n-1$,

oraz $n \ge 4$, to algebra B jest dzika. Przykładem takiej rodziny szeregów są szeregi

$$x,\ x - \lambda_2 y^2,\ x - \lambda_3 y,\ \cdots,\ x - \lambda_{n-1} y,\ x^2 - \lambda_n y,\ y$$

dla parami różnych niezerowych skalarów $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Zauważamy, że kołczan Q_B jest postaci

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[r, shift left] & 2 \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & 3 \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & \cdots \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & n \arrow[loop right] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd},$$

a więc jest 2-regularny. Zatem, gdyby algebra B była oswojona, to z twierdzenia o triangulacji wynikałoby, że istniałaby permutacja f zbioru strzałek taka, że $f^3 = \mathrm{Id}$ oraz $s(f(\alpha)) = t(\alpha)$ dla każdej strzałki α. To jest jednak niemożliwe dla $n \ge 4$.

Zdefiniujemy teraz specjalne osobliwości zwane minimalnymi osobliwościami eliptycznymi. W tej części zakładamy, że $\operatorname{char} K \neq 2$. Załóżmy, że $3 \leq p \leq q$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$. Ponadto $\lambda \in K^{\times}$, przy czym jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, to dodatkowo $\lambda \neq 1$. Niech

$$T_{p,q}(\lambda) := K[[x,y]]/(x^p + x^q + \lambda x^2 y^2).$$

Jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, to $T_{p,q}(\lambda)$ nazywamy prostą osobliwością eliptyczną. W tym przypadku $(p,q) = (3,6), (4,4)$ oraz

$$T_{3,6}(\lambda) \simeq K[[x,y]]/(y(y-x^2)(y-\lambda x^2))$$

i

$$T_{4,4}(\lambda) \simeq K[[x,y]]/(xy(x-y)(y-\lambda y)).$$

Z drugiej strony, jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, to

$$T_{p,q}(\lambda) \simeq K[[x,y]]/(x^{p-2} - y^2)(x^2 - y^{p-2})$$

(w szczególności, klasa izomorfizmu nie zależy od λ).

Twierdzenie (Drozd/Greuel)**.** *Jeśli R jest zredukowaną izolowaną osobliwością krzywej i charakterystyka ciała K jest różna od 2, to*

(1) *R jest nieskończonego i oswojonego typu Cohena–Macaulaya wtedy i tylko wtedy, gdy R jest minimalną osobliwością eliptyczną;*
(2) *R jest nieskończonego wielomianowego wzrostu Cohena–Macaulaya wtedy i tylko wtedy, gdy R jest prostą osobliwością eliptyczną.*

Twierdzenie (Buan/Iyama/Keller/Reiten)**.** *Jeśli $R := T_{p,q}(\lambda)$ i charakterystyka ciała K jest równa 0, to*

(1) *istnieje obiekt klastrowo odwracający w kategorii $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 3$ i $2 \mid q$ lub $2 \mid p, q$;*
(2) *liczba składników prostych obiektu klastrowo odwracającego w kategorii $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ jest równa 2, gdy $p = 3$, i 3, gdy $2 \mid p$.*

Zauważmy, że

$$T_{3,2q+2}(\lambda) \simeq K[[x,y]]/(f_1 f_2 f_3),$$

gdzie

$$f_1 := y - \lambda x^2, \qquad f_2 := y, \qquad f_3 := y - x^2,$$

jeśli $q = 2$, oraz

$$f_1 := x - y^q, \qquad f_2 := x + y^q, \qquad f_3 := x - q^2,$$

gdy $q > 2$. Stosując przedstawioną wcześniej konstrukcję algebry B, otrzymujemy $B \simeq \Lambda(Q,f,m,c)$, gdzie Q jest kołczanem

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & 2 \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[loop right, "\sigma"] \end{tikzcd},$$

permutacja f dana jest wzorem

$$f(\alpha) := \beta, \qquad f(\beta) := \gamma, \qquad f(\gamma) := \alpha, \qquad f(\sigma) := \sigma,$$

oraz

$$m_\alpha := q, \qquad m_\beta := m_\gamma := m_\sigma := 1,$$

i

$$c_\alpha := \lambda, \qquad c_\beta := c_\gamma := c_\sigma := 1.$$

Podobnie,

$$T_{2p+2,2q+2}(\lambda) \simeq K[[x,y]]/(f_1 f_2 f_3 f_4),$$

gdzie

$$f_1 := x - \lambda y, \qquad f_2 := y, \qquad f_3 := x, \qquad f_4 := x - y,$$

gdy $(p,q) = (1,1)$, oraz

$$f_1 := y^q - x, \qquad f_2 := y^q + x, \qquad f_3 := x^p + y, \qquad f_4 := x^p - y,$$

gdy $(p,q) \neq (1,1)$. W tym przypadku otrzymujemy $B \simeq \Lambda(Q,f,m,c)$, gdzie Q jest kołczanem

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & 2 \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend left, "\sigma"] & 3 \arrow[l, bend left, "\delta"] \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd},$$

permutacja f dana jest wzorem

$$f(\alpha) := \beta, \qquad f(\beta) := \gamma, \qquad f(\gamma) := \alpha,$$
$$f(\sigma) := \eta, \qquad f(\eta) := \delta, \qquad f(\delta) := \sigma,$$

oraz

$$m_\alpha := p, \qquad m_\beta := m_\gamma := m_\sigma := m_\delta := 1, \qquad m_\eta := q,$$

i

$$c_\alpha := \lambda, \qquad c_\beta := c_\gamma := c_\sigma := c_\delta := c_\eta := 1.$$