PRZESTRZENIE STYCZNE DO ROZMAITOŚCI KOŁCZANÓW (DYNKINA)

NA POSTAWIE REFERATU GRZEGORZA ZWARY

Przez cały referat zakładamy, że K jest ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym.

1. Przestrzeń styczna

Przypomnijmy, że jeśli $A = K[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$, $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A$ oraz $P \in \mathcal{X}$, to przestrzeń styczną $T_P\mathcal{X}$ definiujemy jako jądro macierzy $[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$.

Dla przykładu, gdy $\mathcal{X}$ jest zbiorem zer wielomianu $x^3 - y^2$ w K^2 i $P \in \mathcal{X}$, to $\dim_K T_P\mathcal{X} = 1$, gdy $P \neq (0,0)$, oraz $\dim_K T_{(0,0)}\mathcal{X} = 2$. Podobnie gdy $\mathcal{X}$ jest zbiorem wspólnych zer wielomianów xz i yz oraz $P = (x, y, z) \in \mathcal{X}$, to $\dim_K T_P\mathcal{X} = 1$, gdy $z \neq 0$, $\dim_K T_P\mathcal{X} = 2$, gdy $z = 0$ i $(x, y) \neq (0,0)$, oraz $\dim_K T_{(0,0,0)}\mathcal{X} = 3$.

Jeśli $\mathcal{X}$ jest podzbiorem domkniętym (w topologii Zariskiego) w K^n, to zakładamy, że $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} K[\mathcal{X}]$, gdzie $K[\mathcal{X}] = K[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{I}(\mathcal{X})$ oraz $\mathcal{I}(\mathcal{X}) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n]; f(\mathcal{X}) = 0\}$.

2. Rozmaitość reprezentacji

Dla kołczanu Q oraz wektora $\mathbf{d}$ przez $\operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})$ oznaczamy rozmaitość reprezentacji kołczanu Q o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$, tzn. $\operatorname{rep}_Q(\mathbf{d}) := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathbb{M}_{d_{t(\alpha)} \times d_{s(\alpha)}}(K)$. Grupa $\operatorname{GL}(\mathbf{d}) := \prod_{i \in Q_0} \operatorname{GL}_{d_i}(K)$ działa na rozmaitości $\operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})$ zgodnie ze wzorem

$$(g * M)_\alpha := g_{t(\alpha)} M_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1}.$$

Dla $M \in \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})$ piszemy $\mathcal{O}_M := \operatorname{GL}(\mathbf{d}) * M$. Naszym celem jest opis $T_N\overline{\mathcal{O}}_M$ dla $N \in \overline{\mathcal{O}}_M$. Zauważmy, że jeśli $N' \in \mathcal{O}_N$, to $T_{N'}\overline{\mathcal{O}}_M \simeq T_{N,\overline{\mathcal{O}}_M}$.

Jako przykład rozpatrzymy kołczan Q postaci

$$1 \longleftarrow 2.$$

Ustalmy wektor wymiaru $\mathbf{d}$. Dla $r = 0, 1, \ldots, d := \min(d_1, d_2)$, niech M_r będzie reprezentacją odpowiadającą macierzy

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\{0\} = \overline{\mathcal{O}}_{M_0} \subset \overline{\mathcal{O}}_{M_1} \subset \cdots \subset \overline{\mathcal{O}}_{M_d} = \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d}).$$

Data: 07.05.2019.

Pokazuje się, że ideał $\mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}}_{M_r})$ jest generowany przez minory rozmiaru $r+1$. Stąd wynika, że jeśli $s<r$, to $T_{M_s}\overline{\mathcal{O}}_{M_r} = \mathbb{M}_{d_1\times d_2}(K)$, podczas gdy przestrzeń $T_{M_r}\overline{\mathcal{O}}_{M_r}$ składa się z macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix},$$

a więc jest wymiaru $r(d_1+d_2-r)$.

Rozważmy teraz kołczan Q postaci

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

i reprezentację M kołczanu Q odpowiadającą macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy $\overline{\mathcal{O}}_M$ jest zbiorem wszystkich 2×2 macierzy nilpotentych oraz ideał $\mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}}_M)$ jest generowany przez wielomiany $x_{11}+x_{22}$ (ślad) i $x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}$ (wyznacznik). Zatem przestrzeń $T_0\overline{\mathcal{O}}_M$ składa się z macierzy o śladzie 0, a więc jest wymiaru 3.

3. Równania opisujące domknięcie orbity

Ustalmy reprezentację L kołczanu Q i ustalmy jej prezentację projektywną

$$P'' \to P' \to L \to 0.$$

Dla dowolnego $X \in \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})$ mamy indukowany ciąg dokładny

$$0 \to \operatorname{Hom}_Q(L,X) \to \operatorname{Hom}_Q(P',X) \xrightarrow{\Phi} \operatorname{Hom}_Q(P'',X),$$

zatem $\operatorname{Hom}_Q(L,X) = \operatorname{Ker}\Phi$. Zauważmy, że Φ jest macierzą w postaci blokowej, której bloki są kombinacjami liniowymi iloczynów macierzy X_α, $\alpha\in Q_1$.

Dla przykładu, jeśli Q jest kołczanem

$$1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$$

i L jest postaci

$$0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K,$$

to $\Phi = [X_\alpha X_\beta]$. Podobnie, gdy Q jest kołczanem

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

i L jest postaci

$$\begin{tikzcd} K & K \arrow[l, bend right, "1"'] \arrow[l, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd},$$

to $\Phi = [\lambda X_\alpha - X_\beta]$. Wreszcie, gdy Q jest kołczanem

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[ld, "\beta"'] & 1 \arrow[l, "\alpha"'] \\ 3 & 4 \arrow[l, "\gamma"'] & \\ & 5 \arrow[lu, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

i L jest postaci

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[ld, "1"'] & K \arrow[l, "1"'] \\ K & K \arrow[l, "1"'] & \\ & K \arrow[lu, "1"] & \end{tikzcd},$$

to

$$\Phi = \begin{bmatrix} X_\beta X_\alpha & -X_\gamma & 0 \\ 0 & X_\gamma & -X_\delta \end{bmatrix}.$$

Niech $\mathcal{I}_{M,L}$ będzie ideałem w pierścieniu $K[\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})]$ generowanym przez wszystkie minory macierzy Φ rozmiaru $k - \dim_K \mathrm{Hom}_Q(L, M) + 1$, gdzie k jest liczbą kolumn macierzy Φ. Można pokazać, że ideał $\mathcal{I}_{M,L}$ nie zależy od wybory prezentacji. Definiujemy,

$$\mathcal{I}_M := \sum_{L \in \mathrm{rep}(Q)} \mathcal{I}_{M,L} = \sum_{L \in \mathrm{ind}(Q)/\simeq} \mathcal{I}_{M,L}.$$

Wtedy $\mathcal{I}_M \subseteq \mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}}_M)$. Równoważnie,

$$\overline{\mathcal{O}}_M \subseteq \mathcal{C}_M := \mathrm{Spec}(K[\mathrm{rep}_Q(\mathbf{d})]/\mathcal{I}_M).$$

Twierdzenie. *Jeśli Q jest kołczanem Dynkina typu $\mathbb{A}$, to*

$$\mathcal{I}_M = \mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}}_M).$$

Twierdzenie. *Jeśli Q jest kołczanem Dynkina lub rozszerzonym kołczanem Dynkina, to*

$$\sqrt{\mathcal{I}_M} = \mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}}_M).$$

Jeśli Q jest kołczanem

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

i M jest reprezentacją odpowiadającą macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

to

$$\mathcal{I}_M = \mathcal{I}_{M,M} + \mathcal{I}_{M,S},$$

gdzie S jest reprezentacją odpowiadającą macierzy [0]. Stąd

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_M = (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}, x_{11}^2 + x_{12}x_{21},& \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}), x_{21}(x_{11} + x_{22}), x_{22}^2 + x_{12}x_{21}).&\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\sqrt{\mathcal{I}_M} = \mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}}_M)$, ale $\mathcal{I}_M \neq \mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}}_M)$, gdyż $x_{11} + x_{22} \notin \mathcal{I}_M$. Co więcej, $T_0\overline{\mathcal{O}}_M \neq T_0\mathcal{C}_M$, gdyż $\dim_K T_0\mathcal{C}_M = 4$.

Można pokazać, że gdy M jest reprezentacją

$$\begin{tikzcd} K & K^2 \arrow[l, bend right, "{[1\ 0]}"'] \arrow[l, bend left, "{[0\ 1]}"] & K \arrow[l, bend right, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"'] \arrow[l, bend left, "{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}"] \end{tikzcd},$$

to $\sqrt{\mathcal{I}_M} \neq \mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}}_M)$.

4. Przestrzeń styczna i samorozszerzenia

Jeśli $N \in \overline{\mathcal{O}}_M$ to

$$T_N\overline{\mathcal{O}}_N \subseteq T_N\overline{\mathcal{O}}_M \subseteq T_N\mathcal{C}_M \subseteq T_N \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d}),$$

więc

$$T_N\overline{\mathcal{O}}_M/T_N\overline{\mathcal{O}}_N \subseteq T_N\mathcal{C}_M/T_N\overline{\mathcal{O}}_N \subseteq T_N \operatorname{rep}_Q(\mathbf{d})/T_N\overline{\mathcal{O}}_N \simeq \operatorname{Ext}_Q^1(N, N).$$

Jeśli U i V są reprezentacjami, to przez $\mathcal{E}(V, U)$ oznaczamy podzbiór przestrzeni $\operatorname{Ext}_Q^1(V, U)$ składający się z ciągów

$$\sigma : 0 \to U \to W \to V \to 0$$

takich, że ciąg $\operatorname{Hom}_Q(L, \sigma)$ jest dokładny. Wtedy $\mathcal{E}$ jest K-podfunktorem funktora Ext_Q^1.

Twierdzenie. $T_N\mathcal{C}_M/T_N\overline{\mathcal{O}}_N = \mathcal{E}(N, N)$.

Twierdzenie. *Jeśli Q jest kołczanem Dynkina, to*

$$T_N\overline{\mathcal{O}}_M = T_N\mathcal{C}_M.$$

W dowodzie powyższego twierdzenia przydatną rolę odgrywa następujący lemat.

Lemat. *Jeśli*

$$N = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \qquad i \qquad W = \begin{bmatrix} U & Z \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

oraz $W \in \overline{\mathcal{O}}_M$, to $\left[\begin{smallmatrix} 0 & Z \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in T_N\overline{\mathcal{O}}_M$.

Zauważmy, że założenia lematu oznaczają, że $N = U \oplus V$ oraz mamy ciąg dokładny

$$0 \to U \to W \to V \to 0.$$