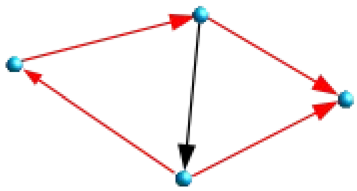
Cykl Hamiltona

Spis treści

I. Cykle Hamiltona

Jest to cykl w grafie, w którym każdy wierzchołek grafu występuje tylko raz. Grafy zawierające cykl Hamiltona nazywamy ***hamiltonowskimi***.



Cykl hamiltona. Niebieskie kropki to wierzchołki,

czerwone strzałki to droga wyznaczająca cykl.

II. Graf hamiltonowski.

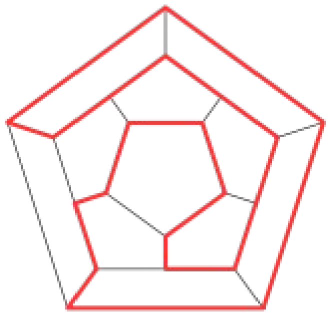
Jest to graf zawierający ścieżkę (drogę) przechodzącą przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz zwaną ścieżką Hamiltona. W szczególności grafem hamiltonowskim jest graf zawierający cykl Hamiltona, tj. zamkniętą ścieżkę Hamiltona. W niektórych źródłach graf zawierający tylko ścieżkę Hamiltona nazywany jest grafem półhamiltonowskim.

Aby lepiej zrozumieć właściwości grafu hamiltonowskiego można się posłużyć przykładem komiwojażera, który chce odwiedzić wszystkich swoich klientów, ale tylko raz. Klienci, to wierzchołki grafu, a drogi między nimi są jego krawędziami. Jeżeli graf jest hamiltonowski, to znaczy, że komiwojażer może obejść wszystkich klientów, bez mijania drugi raz żadnego z nich i wrócić do punktu wyjścia.

1. Przykłady grafów hamiltonowskich.

Grafem hamiltonowskim w szczególności jest każdy graf:

- pełny[1], posiadający przynajmniej 3 wierzchołki
- opisujący wielościan foremny
- będący nadgrafem grafu hamiltonowskiego



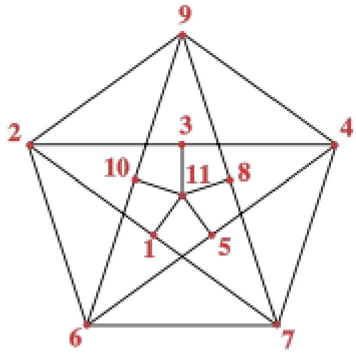
Graf hamiltonowski na przykładzie dwunastościanu foremnego.

2. Złożoność czasowa.

Nie są znane algorytmy umożliwiające jednoznaczne rozwiązanie problemu znajdowania najkrótszej możliwej ścieżki Hamiltona w czasie wielomianowym[2] i działające dla wszystkich możliwych grafów (problem ścieżki Hamiltona jest NP zupełny[3]). W praktyce najczęściej stosowane są algorytmy genetyczne[4], często wykorzystywane w połączeniu z heurystycznymi[5] (np. heurystyka najbliższego

1 Graf pełny – graf prosty, w którym dla każdej pary wierzchołków istnieje droga między nimi.
2 Z teorii złożoności obliczeniowej jest to czas, w którym algorytm wykona maksymalną, odpowiednią dla zapisu ilość operacji podstawowych.
3 Najtrudniejszy problem klasy NP (problemów rozwiązywalnych w czasie wielomianowym).
4 Algorytmy przypominające swoim działaniem zjawisko ewolucji. Przeszukują one przestrzeń alternatywnych rozwiązań problemu w celu znalezienia rozwiązania najlepszego.
5 Metoda szukania rozwiązań, w której nie ma gwarancji na znalezienie rozwiązania optymalnego lub bardzo często prawidłowego.

sąsiada). Są to jednak metody dające w większości jedynie rozwiązania bliskie optymalnemu. Znalezienie najlepszego, możliwego rozwiązania, zależy głównie od ilości punktów oraz czasem szczęścia na skutek generacji populacji początkowej, krzyżowania oraz mutacji w algorytmach genetycznych.



Przykład cyklu Hamiltona na podstawie grafu Mycielskiego.

Problem złożoności czasowej znajdowania rozwiązania problemu grafu Hamiltonowskiego wiąże się z brakiem twierdzenia takiego jak twierdzenie Eulera dla grafów Eulera[6]. Owo twierdzenie pozwala w czasie liniowym (tj. zależnym liniowo od, w tym przypadku, liczby wierzchołków) znaleźć odpowiedź na pytanie, czy graf jest eulerowski. W przypadku grafów Hamiltona twierdzenie takie prawdopodobnie nie istnieje.

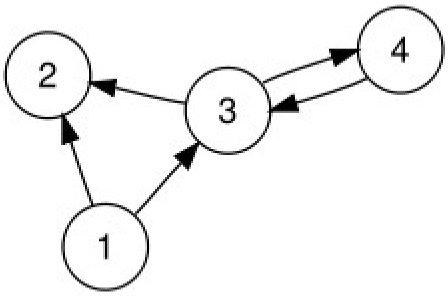
Znalezienie algorytmu znajdowania drogi Hamiltona w czasie wielomianowym jest "Świętym Graalem" informatyki, i chociaż powstały już setki publikacji opisujących rzekomo taki właśnie algorytm, problem jest nadal otwarty. Według znakomitej części specjalistów taki algorytm nie istnieje ("gdyż, zgodnie z rachunkiem prawdopodobieństwa, ktoś już by taki algorytm znalazł"), jednak do czasu udowodnienia, że takowy algorytm nie istnieje, lub udowodnienia, że taki dowód nie może zostać przeprowadzony należy wstrzymać się z kategorycznymi

6 Graf, w którym droga przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz.

osądami.

3. Oznaczenia.

Niech G oznacza graf, $V(G)$ zbiór jego wierzchołków, $E(G)$ zbiór krawędzi, | A | moc zbioru[7], v_i pojedynczy (w tym przypadku i-ty) wierzchołek grafu a $deg(v)$ stopień wierzchołka (liczbę kończących się w nim krawędzi). Tradycyjnie oznacza się $|V(G)| = n$ oraz $|E(G)| = m$, zapis {v,u} będący zbiorem dwuelemtowym wierzchołków, używa się do oznaczenia krawędzi między v i u (w przypadku digrafów[8] jest to para uporządkowana, gdyż liczy się kolejność oznaczająca kierunek krawędzi).



Ilustracja 1: Graf skierowany (digraf)

4. Indeksowanie wierzchołków.

7 W teorii mnogości termin, który określa liczebność zbioru.

8 Graf skierowany, czyli uporządkowana para zbiorów. Pierwszy to zbiór wierzchołków grafu, a drugi zbiór krawędzi (uporządkowanych par wierzchołków). Ruch po grafie możliwy jest tylko w kierunkach wskazywanych przez strzałki. Zobacz *Ilustracja 1.*

Ścieżka/cykl Hamiltona może być jednoznacznie wyznaczona przez indeksowanie wierzchołków - tj. nadanie im indeksów, powiedzmy $v_0, v_1, \ldots, v_n$, takich, że istnieje ścieżka Hamiltona przechodząca w takiej właśnie kolejności przez wierzchołki grafu.

Gdy znane jest indeksowanie $v_0, v_1, \ldots, v_n$ wyznaczające ścieżkę Hamiltona, to znalezienie (lub potwierdzenie nieistnienia) cyklu Hamiltona jest trywialne i sprowadza się do sprawdzenia, czy istnieje krawędź {vn,v0} - zajmuje to, w zależności od sposobu reprezentacji grafu[9], czas stały lub $O(n)$[10], gdzie n to liczba wierzchołków danego grafu.

5. Warunek konieczny

Jeżeli graf G jest hamiltonowski to dla każdego niepustego zbioru V' zbioru wierzchołków V(G) zachodzi

$$\omega(V(G)\ -\ V') \leq |V'|$$

gdzie $\omega(G)$ oznacza ilość spójnych składowych[11] grafu G.

6. Warunki wystarczające.

Istnieją jednak twierdzenia pozwalające na podstawie cech grafu, dostępnych w czasie liniowym, stwierdzić jednoznacznie, czy dany graf jest hamiltonowski. Należy pamiętać, że jest to implikacja jednostronna - istnieje nieskończenie wiele grafów hamiltonowskich, które nie mają poniższych cech.

---

9 Sposób zapisu grafu, który umożliwia jego obróbkę przy użyciu programów komputerowych.

10 Notacja duże O – zależność ilości potrzebnych zasobów obliczeniowych od wielkości danych wejściowych (funkcja f jest co najwyżej rzędu g – O(f(n))).

11 Jest to taka część grafu G, której nie da się przedstawić w postaci dwóch niepustych i rozłącznych podgrafów.

Twierdzenia te są matematycznym obrazem dość naturalnej obserwacji dotyczącej własności grafów - jest logiczne, że im więcej jest krawędzi w grafie, tym "większe są szanse" na znalezienie wśród nich drogi Hamiltona. W skrócie (i nieformalnie), poniższe twierdzenia mówią, że graf jest hamiltonowski, jeżeli tylko ma on odpowiednio dużo krawędzi w stosunku do ilości wierzchołków.

Najważniejsze z nich to:

- Twierdzenie Diraca (1952),
- Twierdzenie Ore (1961),
- Twierdzenie o ilości krawędzi,
- Twierdzenie Bondy'ego-Chvátala,
- Twierdzenie dla grafu dwudzielnego.

1) Twierdzenie Diraca

Treść twierdzenia

Jeśli graf G nie ma pętli, ani krawędzi wielokrotnych (jest grafem prostym) i

$$|V(G)| \geq 3$$

oraz jeśli

$$\deg(v) \geq \frac{n}{2}$$

dla każdego wierzchołka w *G*, to jest on hamiltonowski.

Dowód twierdzenia

Jeśli dla każdego wierzchołka *v*:

$$\deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

to

$$\deg(v) + \deg(u) \geq n$$

dla każdego wierzchołka *v* i *u*, niezależnie od tego czy są połączone krawędzią, czy nie, a więc *G* spełnia założenia twierdzenia Ore, a więc jest hamiltonowski.

2) Twierdzenie Ore

Treść twierdzenia

Jeżeli w grafie *G* o n wierzchołkach, $n > 2$ zachodzi następująca nierówność:

$$\deg(v) + \deg(u) \geq n$$

dla każdej pary **nie połączonych bezpośrednio** krawędzią wierzchołków *u* i *v* (tj. takich, że $\{v, u\} \notin E(G)$), to graf *G* jest hamiltonowski.

Dowód twierdzenia

Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że twierdzenie jest fałszywe, czyli dla pewnej liczby *n* istnieje kontrprzykład *G* - graf, który spełnia założenie twierdzenia, ale nie jest Hamiltonowski. Spośród wszystkich takich grafów rozpatrzmy ten, który ma najmnieszą liczbę wierzchołków, a spośród nich taki, dla którego wartość $|E(G)|$ jest maksymalna. Jest to podgraf pełnego grafu hamiltonowskiego Kn. Dodanie do G krawędzi z grafu Kn daje w wyniku graf, który nadal spełnia założenia twierdzenie i który ma więcej niż $|E(G)|$ krawędzi, a więc ze względu na wybór grafu G tak powstały graf będzie miał cykl Hamiltona. To znaczy, że G musi mieć (przynajmniej) drogę Hamiltona, określoną przez pewien ciąg wierzchołków, $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Ponieważ G nie ma cyklu Hamiltona, to nie istnieje krawędź łącząca v_1 i v_n. Z kolei z założenia wiemy, że:

$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n.$

Można teraz zdefiniować podzbiory zbioru $\{2, 3, \cdots, n\}$ takie, że:

$S_1 = \{i : \{v_1, v_i\} \in E(G)\}$

i

$S_n = \{i : \{v_{i-1}, v_n\} \in E(G)\},$

wtedy:

$|S_n| = \deg(v_n)$ i $|S_1| + |S_n| \geq n$.

Ponieważ:

$|S_1| + |S_n| \geq n$

i zbiór

$S_1 \cup S_n$

ma co najwyżej *n-1* elementów, a więc zbiór $S_1 \cap S_n$ musi być niepusty. Istnieje więc liczba *i*, dla której istnieją krawędzie $\{v_1, v_i\}$ i $\{v_{i-1}, v_n\}$. Wtedy droga:

$v_1, \cdots, v_{i-1}, v_n, \cdots, v_i, v_1$

jest cyklem Hamilotona w grafie *G*, sprzeczność. ■

3) Twierdzenie o ilości krawędzi

Treść twierdzenia

Jeśli graf prosty o n wierzchołkach ma co najmniej m krawędzi, gdzie:

$$m = \frac{1}{2} \cdot (n-1)(n-2) + 2,$$

to jest hamiltonowski.

Dowód twierdzenia

Dla dowolnego grafu prostego G załózmy, że zachodzi

$$|E(G)| \geq \frac{1}{2} \cdot (n-1)(n-2) \ + \ 2 \ = \ \binom{n-1}{2} \ + \ 2$$

i weżmy wierzchołki v i u takie, że:

$\{v, u\} \notin E(G)$.

Niech H będzie grafem G z którego usunięto wierzchołki v i u oraz kończące się w nich krawędzie. Ponieważ:

$\{v, u\} \notin E(G)$,

więc usunęliśmy deg(v) + deg(u) krawędzi i dwa wierzchołki. H jest podgrafem grafu Kn − 2, a więc:

$$\binom{n-2}{2} \ = \ |E(K_{n-2})| \geq |E(H)| \geq \binom{n-1}{2} \ + \ 2 \ - \ deg(v) \ - \ deg(u)$$

z czego wynika, że:

$$deg(v) \ + \ deg(u) \geq \binom{n-1}{2} \ - \ \binom{n-2}{2} \ + \ 2 \ = \ \frac{1}{2}(n-2) \cdot 2 \ + \ 2 \ = \ n,$$

a więc G spełnia założenia twierdzenia Ore.

4) Twierdzenie Bondy'ego-Chvátala

Treść twierdzenia

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach, a $C(G)$ oznacza jego nadgraf zbudowany według reguły mówiącej, że dla każdej pary $\{v, u\}$ nie połączonych bezpośrednio krawędzią wierzchołków takich, że:

$$deg(v) + deg(u) \geq n$$

należy dodać krawędź $\{v, u\}$. Graf G jest hamiltonowski wtedy, i tylko wtedy, gdy $C(G)$ jest hamiltonowski.

5) Twierdzenie dla grafu dwudzielnego

Treść twierdzenia

Niech G będzie grafem dwudzielnym i niech:

$$V(G) = V_1 \cup V_2$$

będzie podziałem wierzchołków G.

Jeśli G ma cykl Hamiltona, to:

$$|V_1| \ = \ |V_2|$$

Jeśli G ma ścieżkę Hamiltona, to wartości | V1 | i | V2 | różnią się co najwyżej o 1.

Dla pełnych grafów dwudzielnych zachodzi też implikacja w lewo, tj. jeśli:

$$|V_1| \ = \ |V_2|$$

to G ma cykl Hamiltona.

Jeśli | V1 | i | V2 | różnią się co najwyżej o 1 to G ma ścieżkę Hamiltona.

Dowód

Niech n oznacza ilość wierzchołków grafu G.

- Cykl Hamiltona możemy wyznaczyć biorąc na przemian wierzchołki leżące w zbiorach V1 i V2. Jeśli:

$v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1$

wyznacza drogę zamkniętą przechodzącą dokładnie raz przez każdy wierzchołek, to

$v_1, v_3, v_5 \cdots$

muszą należeć do jednego ze zbiorów podziału, BSO załóżmy, że należą one do V1. Ponieważ istnieje krawędź $\{v_n, v_1\}$, liczba n musi być parzysta, a więc wszystkie wierzchołki $v_2, v_4, \cdots, v_n$ należą do V2, z czego wynika, że:

$|V_1| \ = \ |V_2|$.

W przypadku ścieżki Hamiltona można zastosować podobne wyszukiwanie, zakończyć je na wierzchołku vn. W przypadku, gdy n nie jest parzyste, jeden ze zbiorów ma jeden dodatkowy wierzchołek.

Załóżmy G jest pełnym grafem dwudzielnym, tj.:

$G = K_{|V_1|,|v_2|} \cdot$.

Jeżeli:

$|V_1| \ = \ |V_2|$

to dla każdego "przemiennego" indeksowania wierzchołków $v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1$ wyznacza cykl Hamiltona w G. Gdy jeden z podziałów, np. V1 jest mniejszy wystarczy wyjść z niego przez $\{v_{|V_1|}, v_{|V_2|}\}$.

7. Szczególne przypadki.

Oczywiste jest, że żaden graf niespójny[12] nie jest hamiltonowski. Dodawanie krawędzi (w szczególności krawędzi wielokrotnych i pętli) do grafu Hamiltona w oczywisty sposób nie może uczynić z niego grafu niehamiltonowskiego. Każdy graf pełny o V wierzchołkach zawiera V![13] cykli Hamiltona, gdyż dla każdej permutacji[14] indeksów wierzchołków, $v_1, v_2, \ldots, v_V, v_1$ wyznacza istniejącą drogę, będącą cyklem Hamiltona. Każdy turniej[15] ma ścieżkę Hamiltona.

8. Algorytmy znajdowania ścieżki Hamiltona

Algorytm Robertsa-Floresa:

- Budujemy macierz następników: kolumny macierzy odpowiadają wierzchołkom i zawierają ich nas*tą*pniki w pewnej, na pocz*ą*tku ustalonej, kolejności.
- Rozpoczynamy z dowolnego wierzchołka *v.* Bierzemy pierwszy ”dostępny” (który jeszcze nie został włączony do zbioru *S* wierzchołków budowanego cyklu) następnik z kolumny odpowiadającej *v.* Załóżmy, że jest to wierzchołek *u*. *S* := *S U {u}*. Następnie bierzemy pierwszy dostępny następnik wierzchołka *u* z kolumny odpowiadającej *u*, itd.
- Mamy następujące możliwości:

1. Nie ma dostępnego następnika następuje krok powrotu wyrzucamy z *S* ostatnio

12 Graf, w którym znajdą się dwa wierzchołki, pomiędzy którymi nie istnieje droga.
13 czyt. V silnia
14 Uporządkowanie elementów zbioru, inaczej ustawienie ich w pewnej kolejności.
15 Graf pełny w którym zorientowano krawędzie, lub inaczej, graf skierowany którego graf podstawowy jest grafem pełnym.

dodany wierzchołek, wracamy do kolumny, z której został on wybrany i bierzemy kolejny dostępny następnik; następnie bierzemy pierwszy dostępny jego następnik, itd. (oczywiście za każdym razem, gdy nie ma dostępnego następnika następuje krok powrotu);

2. Zbiór *S* ma już moc n czyli znaleźliśmy już ścieżkę Hamiltona *H* z *v* do *w*, gdzie *w* jest ostatnio dodanym do *S* wierzchołkiem. Sprawdzamy, czy istnieje łuk z *w* do *v*: jeśli TAK, to zapisujemy cykl Hamiltona *H* + *vw* i krok powrotu (lub STOP jeśli chcemy znaleźć tylko jeden cykl Hamiltona); jeśli NIE, to krok powrotu.

- Koniec następuje, gdy powrócimy do wierzchołka *v* i nie ma już dostępnych jego następników.