II Matematyczne Igrzyska Dolnej Wisły

Eliminacje 9 maja 1998 roku

Szkice rozwiązań zadań dla klas pierwszych

Zadanie 1. Sposób I
Wypisujemy po kolei liczby mniejsze od 100 postaci: $1^2 + 2^2 = 5$, $1^2+3^2 = 10$, itd. do $1^2+9^2 = 82$, gdyż następna jest już trzycyfrowa. Dalej wypisujemy $2^2+3^2 = 13$, $2^2+4^2 = 20$, itd. do $2^2 + 9^2 = 85$. Następnie $3^2 + 4^2 = 25$, $3^2 + 5^2 = 34$, ..., $3^2 + 9^2 = 90$, potem $4^2 + 5^2 = 41$ do $4^2 + 9^2 = 97$, dalej $5^2 + 6^2 = 61$, $5^2 + 7^2 = 74$, $5^2 + 8^2 = 89$ i w końcu $6^2 + 7^2 = 85$. Widać, że najmniejszą liczbą, która się powtarza, jest $n = 65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$.

Sposób II
Szukamy liczby naturalnej n spełniającej warunki $n = a^2+b^2$ i $n = c^2 + d^2$, gdzie np. $a < b$ i $c < d$. Równość $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ przekształcamy do postaci $b^2 - d^2 = c^2 - a^2$, czyli $(b - d) \cdot (b + d) = (c - a) \cdot (c + a)$. Pary liczb a, b i c, d powinny być różne, więc różne mają być nawiasy po obu stronach tej równości. Widać też, że oba nawiasy po każdej ze stron muszą tej samej parzystości (dlaczego?). Możemy wziąć np. $1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$, czyli $b - d = 1$, $b + d = 15$, $c - a = 3$, $c + a = 5$, skąd otrzymujemy $b = 8$, $d = 7$, $c = 4$, $a = 1$, czyli $n = 65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ (ale dlaczego to n jest najmniejsze?).

Zadanie 2.
Liczba $1998! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1997 \cdot 1998$ ma tyle zer na końcu, jaka jest największa potęga liczby 10, przez którą jest podzielna. $10 = 2 \cdot 5$, więc szukamy po prostu wykładnika, z jakim występuje liczba 5 w rozkładzie liczby 1998! na czynniki pierwsze (dlaczego 5, a nie 2?). W iloczynie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1997 \cdot 1998$ jest $\frac{1995}{5} = 399$ czynników podzielnych przez 5, w tym $\frac{1975}{25} = 79$ podzielnych przez 25, $\frac{1875}{125} = 15$ podzielnych przez 125 i $\frac{1875}{625} = 3$ podzielne przez 625. W takim razie liczba pierwsza 5 występuje w całym iloczynie $399 + 79 + 15 + 3 = 496$ razy i tyloma zerami kończy się 1998!.

Zadanie 3.
Niech środkowa $\overline{AD}$ dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne: $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$.
W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są ostre. (Jeśli $KL = KM$, to bok $\overline{LM}$ nazywamy podstawą trójkąta równoramiennego KLM.) Zauważmy, że jeden z kątów $\angle ADB$ i $\angle ADC$ jest prosty lub rozwarty (gdyż ich suma wynosi 180°). Oznacza to, że $\overline{AB}$ jest podstawą w $\triangle ABD$ (czyli $AD = BD$) lub $\overline{AC}$ jest podstawą w $\triangle ACD$ (czyli $AD = CD$). Jeśli $AD = BD$, to $AD = CD$ (gdyż $BD = CD$) i na odwrót, czyli tak czy inaczej, mamy $AD = BD = CD$.
Wówczas $\angle BAD = \angle ABD = \beta$ i $\angle CAD = \angle ACD = \gamma$. Suma kątów w trójkącie ABC wynosi $2\beta + 2\gamma = 180°$, skąd otrzymujemy $\angle BAC = \beta + \gamma = 90°$, czyli trójkąt ABC jest prostokątny.

Zadanie 4.
Jeśli do dwunastej zostało t minut, to wskazówka godzinowa znajduje się $\frac{1}{2}t$ stopni przed dwunastą, a minutowa $6t$ stopni przed dwunastą. Kąt między nimi wynosi $x = 6t - \frac{1}{2}t = \frac{11}{2}t$ stopni, jeśli $\frac{11}{2}t \leqslant 180$ i $x = 360 - \frac{11}{2}t$ stopni, jeśli $\frac{11}{2}t > 180$ (i wówczas $x > 360 - \frac{11}{2} \cdot 60 = 30$ stopni). Zatem $t = \frac{2}{11}x$ lub $t = \frac{2}{11} \cdot (360 - x)$, przy czym dla $x \leqslant 30$ zachodzi tylko jedna możliwość: $t = \frac{2}{11}x$.

Szkice rozwiązań zadań dla klas drugich i trzecich

Zadanie 1.
Zauważmy najpierw, że skoro $a_n \cdot a_{n+1} = n^2 + n > 0$, to $a_n \neq 0$ dla każdego n. Korzystając z równości $a_n \cdot a_{n+1} = n \cdot (n + 1)$, dostajemy

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{a_{k+1} \cdot a_{k+2}}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{(k + 1) \cdot (k + 2)}{k \cdot (k + 1)} = \frac{k + 2}{k}$$

dla dowolnego $k \geqslant 1$. Mamy więc:

$$\frac{a_{1998}}{a_2} = \frac{a_4}{a_2} \cdot \frac{a_6}{a_4} \cdot \frac{a_8}{a_6} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{1996}}{a_{1994}} \cdot \frac{a_{1998}}{a_{1996}} =$$

$$= \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{1996}{1994} \cdot \frac{1998}{1996} = \frac{1998}{2} = 999.$$

Zadanie 2. Sposób I
Jeśli $AX = x$ $(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2})$, to $BX = 1 - x$ i $BY = 2x$. Wówczas $XY^2 = BX^2 + BY^2 = (1-x)^2 + (2x)^2 = 5x^2 - 2x + 1$. Trójmian kwadratowy $5x^2 - 2x + 1$ przyjmuje najmniejszą wartość $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{4}{5}$ dla $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{5}$. Najmniejszą wartością XY^2 jest $\frac{4}{5}$, więc najmniejsza odległość XY wynosi $\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Sposób II
Jeśli układ odniesienia zwiążemy z punktem X (który pozostaje we wierzchołku A), to punkt Y będzie sie poruszał z wierzchołka B do środka E boku CD. Najmniejszą odległością punktów X i Y jest wówczas odległość punktu A od prostej BE, czyli długość odcinka AF, gdzie $F \in \overline{BE}$ i $AF \perp BE$. Trójkąty AFB i BCE są podobne (kąty!), więc $AF = \frac{AF}{AB} = \frac{BC}{BE}$. Z łatwością obliczamy $BE = \frac{\sqrt{5}}{2}$, zatem $AF = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Zadanie 3.
Umiemy podzielić kwadrat $ABCD$ na sześć trójkątów w sposób następujący. Na bokach $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ obieramy punkty E i F, odpowiednio, dzielące je w stosunku $1 : 2$ ($BE = 2 \cdot EA$ i $DF = 2 \cdot CF$). Niech G będzie środkiem boku BC, a H środkiem odcinka DE. Podzieliliśmy kwadrat na trójkąty ADE, BEG, CEF, CEG, DFH i EFH.

Zadanie 4.
Gdyby B był rycerzem, to C i D byliby rycerzami, ale C mówi, że A jest łotrem, a D mówi, że A jest rycerzem, sprzeczność. B nie może być rycerzem, więc jest łotrem. Podobnie uzasadniamy, że D jest łotrem.
Jeśli A jest rycerzem, to C (zgodnie z tym, co mówi A) jest łotrem i wszystko się zgadza. Jeśli A jest łotrem, to zdanie wypowiedziane przez C jest prawdziwe, czyli jest on rycerzem i też się wszystko zgadza.
Otrzymujemy zatem, że wśród A, B, C, D są same łotry i jeden rycerz: A lub C.