Finał II Matematycznych Igrzysk Dolnej Wisły

GRUDZIĄDZ 13 czerwca 1998

Zadania dla klas pierwszych

Zadanie 1. Podzielić 1998 na cztery części tak, by stosunek pierwszej części do drugiej był równy $\frac{3}{4}$, drugiej do trzeciej $\frac{4}{5}$, a trzeciej do czwartej $\frac{5}{6}$.

Zadanie 2. Mając trzy liczby dodatnie a, b, c, możemy utworzyć trzy sumy (po dwa składniki): $a+b$, $a+c$, $b+c$. Dowieść, że jedna z danych liczb jest średnią kwadratową obu pozostałych wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z otrzymanych sum jest średnią harmoniczną obu pozostałych sum. Średnią kwadratową liczb x, y nazywamy $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, a harmoniczną $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

Zadanie 3. Rozważmy pięć następujących zdań:
A: "Zdanie B jest fałszywe."
B: "Co najmniej jedno ze zdań C i D jest prawdziwe."
C: "Wśród zdań A i E nie ma fałszywego."
D: "Co najmniej jedno ze zdań B i C jest prawdziwe."
E: "Zdanie D jest fałszywe."
Co można powiedzieć o prawdziwości tych zdań?

Zadanie 4. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny, jaki powinny spełniać liczby dodatnie a, b, c, d, aby istniał trapez o podstawach długości a, b i ramionach długości c, d.

Szkice rozwiązań zadań dla klas I

1. $3+4+5+6=18$, więc dzielimy 1998 na 18 równych kawałków, $1998:18=111$. Trzy kawałki tworzą pierwszą część: $3\cdot 111=333$, cztery drugą: $4\cdot 111=444$, pięć trzecią $5\cdot 111=555$, a sześć kawałków tworzy czwartą część: $6\cdot 111=666$. Rzeczywiście wszystko się zgadza: $\frac{333}{444}=\frac{3}{4}$, $\frac{444}{555}=\frac{4}{5}$ i $\frac{555}{666}=\frac{5}{6}$.

2. Zastanówmy się, co to znaczy, że np. suma $a+b$ jest średnią harmoniczną sum $a+c$ i $b+c$. Oznacza to, że $a+b=\frac{2}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}}=\frac{2(a+c)(b+c)}{a+c+b+c}$, czyli $(a+b)(a+b+2c)=2(a+c)(b+c)$. Po wymnożeniu nawiasów i skróceniu zostanie nam $a^2+b^2=2c^2$, skąd natychmiast $c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, czyli c jest średnią kwadratową liczb a i b.

3. Zadanie to można analizować na kilka sposobów, np. tak. Przypuśćmy, że C jest prawdziwe. Oznacza to, że A i E są prawdziwe. Z A mamy, że B jest fałszywe, ale przecież B jest prawdziwe, sprzeczność. Zatem C nie może być prawdziwe, czyli jest fałszywe. W takim razie co najmniej jedno ze zdań A i E jest fałszywe. Z fałszywości A dostaniemy kolejno prawdziwość B, D i fałszywość E. Z fałszywości E dostajemy to samo. Ostatecznie prawdziwe są zdania B i D, fałszywe A, C i E. Z łatwością sprawdzamy, że wszystko się zgadza.

4. Pokażemy najpierw, że taki trapez istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje trójkąt o bokach $|a-b|$, c, d. Otóż, jeśli istnieje trapez, to przez koniec jednego z ramion prowadzimy prostą równoległą do drugiego ramienia i otrzymujemy żądany trójkąt. Jeśli natomiast istnieje taki trójkąt, to konstrukcję prowadzimy w odwrotną stronę – dobudowujemy równoległobok i dostajemy trapez. Warunki istnienia trójkąta o bokach x, y, z (liczby dodatnie) to nierówności $x+y>z$, $y+z>x$ i $z+x>y$, które można skrócić tak: $|x-y|<z<x+y$, czyli w naszym przypadku mamy: $|c-d|<|a-b|<c+d$.

Zadania dla klas drugich i trzecich

Zadanie 1. Rozwiązać układ równań:
$a+b=1$, $b+c=2$, $c+d=3$, $d+e=4$, $e+a=5$.

Zadanie 2. Dzisiaj jest sobota, 13 czerwca 1998 roku. Jaki dzień tygodnia będzie za sto lat, 13 czerwca 2098 roku, a jaki za 200 lat? Wyznaczyć te dni tygodnia, jeśli takie istnieją (a sam(a) się przekonasz, że istnieją), w które nie przypadnie żaden 13 czerwca roku $1998+n\cdot 100$ (dla żadnego całkowitego $n\geqslant 1$).
Uwaga. Rok zwykły liczy 365 dni. Zwykłymi są lata o numerach niepodzielnych przez 4 (np. 1998, 1999) oraz lata o numerach podzielnych przez 100, ale niepodzielnych przez 400 (np. 2100, 2200). Rok przestępny liczy 366 dni. Przestępnymi są lata o numerach podzielnych przez 4, ale niepodzielnych przez 100 (np. 1996, 2004) oraz lata o numerach podzielnych przez 400 (np. 2000, 2400).

Zadanie 3. Rozważamy kwadrat o wymiarach 3×3, złożony z 9 kwadratów jednostkowych, czyli mamy 16 wierzchołków. Każdy odcinek łączący jakieś dwa z tych wierzchołków nazywamy "dobrym". Narysować możliwie najwięcej dobrych odcinków, z których każde dwa są różnej długości i żadne dwa nie mają punktów wspólnych.

Zadanie 4. Dany jest pięciokąt, w którym każda przekątna jest równoległa do boku nie posiadającego z nią wspólnych końców. W tym pięciokącie jedna z przekątnych dzieli drugą na dwa odcinki. Znaleźć stosunek dłuższego z tych odcinków do krótszego. Tylko proszę nie mówić, że jest za mało danych.

Szkice rozwiązań zadań dla klas II i III

1. Sposób pierwszy. Z pierwszego $b=1-a$ wstawiamy do drugiego: $1-a+c=2$, czyli $c=1+a$. Wstawiamy to do trzeciego: $1+a+d=3$, skąd $d=2-a$ wstawiamy do czwartego: $2-a+e=4$, czyli $e=2+a$. Wstawiamy to do piątego: $2+a+a=5$ i mamy $a=\frac{3}{2}$. Otrzymujemy $b=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$, $c=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$, $d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ i $e=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$.
Sposób drugi. Dodając pierwsze, trzecie i piąte, otrzymujemy $2a+b+c+d+e=9$, a dodając drugie i czwarte, dostajemy $b+c+d+e=6$, więc $2a+6=9$, czyli $a=\frac{3}{2}$ i po kolei można wyznaczyć pozostałe niewiadome.

2. $365=52\cdot 7+1$, więc jeśli po drodze nie będzie 29 lutego, to za rok tego samego dnia przypada następny dzień tygodnia. Jeśli jest po drodze 29 lutego, to przez rok dzień tygodnia "przesunie się" o 2. Od 1998 do 2098 jest 100 lat, w tym 25 przestępnych, więc dzień tygodnia przesunie się o $100+25=125=18\cdot 7-1$, czyli o jeden do tyłu, tzn. 13 czerwca 2098 roku będzie piątek. W ciągu następnych stu lat będą 24 przestępne (2100 jest zwykły), więc dzień tygodnia przesunie się o $100+24=124=18\cdot 7-2$, czyli 2 do tyłu, więc 13 czerwca 2198 będzie środa. Przez kolejne sto lat (2198-2298) znów dzień tygodnia przesunie się o 2 do tyłu (13 VI 2298 – poniedziałek) i przez następne 100 też. 13 VI 2398 będzie sobota. Co 400 lat wszystko się powtarza, czyli we wtorek, czwartek ani niedzielę 13 dzień czerwca roku $1998+n\cdot 100$ nie przypadnie nigdy, chyba że zmienią nam kalendarz.

4. Niech przekątne BD i BE przecinają przekątną AC w punktach K i L, odpowiednio. Oznaczmy $AK=a$, $KC=b$. Czworokąty $AKDE$ i $DELC$ są równoległobokami, więc $DE=a$ i $CL=a$, zatem $KL=a-b$. Z twierdzenia Talesa mamy: $\frac{AK}{KC}=\frac{DK}{KB}=\frac{BD}{BK}-1=\frac{DE}{KL}-1$, czyli $\frac{a}{b}=\frac{a}{a-b}-1$. Stąd $a^2-ab-b^2=0$, czyli $(\frac{a}{b})^2-\frac{a}{b}-1=0$, więc $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.