III Matematyczne Igrzyska Dolnej Wisły

Grudziądz 2 czerwca 2001 roku

Szkice rozwiązań zadań dla klas pierwszych

Zadanie 1. *Znajdź takie dwie liczby trzycyfrowe, że jedną z nich otrzymujemy z drugiej przez odwrócenie kolejności cyfr, a ich iloczyn jest podzielny przez* 8100.

Jasne jest, że żadna z tych dwu liczb nie może być podzielna przez 10. Jeśli ich iloczyn ma być podzielny przez 100, to jedna z tych liczb powinna dzielić się przez 4, a druga przez 25. Liczba podzielna przez 25, ale nie przez 10, ma dwie ostatnie cyfry 25 lub 75. Zatem pierwsza z naszych liczb jest postaci

$$52\star \quad \text{lub} \quad 57\star$$

i dzieli się przez 4, więc jest jedną z liczb

$$524, \quad 528, \quad 572, \quad 576.$$

Zauważmy jeszcze, że dwie liczby trzycyfrowe, z których jedną otrzymujemy z drugiej przez odwrócenie kolejności cyfr, mają tę samą sumę cyfr. Zatem ich iloczyn jest podzielny przez 81 tylko wtedy, gdy obie dzielą się przez 9. Tym samym pierwszą z liczb jest 576, a drugą 675.

Zadanie 2. *Prosta p przecina boki AD i BC czworokąta $ABCD$ w punktach K i L, a przekątne AC i BD w ich środkach E i F (odpowiednio). Wykaż, że jeżeli $|KE| = |LF|$, to $AB \parallel CD$.*

Jeśli K jest środkiem boku AD, to $KE \parallel CD$ oraz $KF \parallel AB$, jako linie środkowe w trójkątach ACD i ABD. Wówczas oczywiście $AB \parallel CD$. To samo dostajemy, jeśli punkt L jest środkiem boku BC.
Załóżmy teraz, że punkty K i L nie są środkami boków. Środek boku AD oznaczmy przez G, a środek boku BC przez H. Skoro $EG \parallel CD$ i $FH \parallel CD$, to $EG \parallel FH$, skąd

$$|\angle GEK| = |\angle HFL|.$$

Z warunków zadania mamy $|KE| = |LF|$, oprócz tego

$$|EG| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = |FH|,$$

więc trójkąty EGK i FHL są przystające. Zatem

$$|\angle EGK| = |\angle FHL|,$$

czyli proste AD i BC są równoległe. Oznacza to, że każdy z punktów E i F (jako środek odcinka łączącego punkt leżący na jednej prostej z punktem leżącym na drugiej prostej) leży na prostej równoległej do AD i BC i równo odległej od każdej z nich. Z drugiej strony, punkty E i F leżą na prostej p, zatem $E = F$. W takim razie czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem i $AB \parallel CD$.

Zadanie 3. *Wskaż liczby całkowite a, b, c, d, dla których liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest rozwiązaniem równania*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Sposób I
Przekształcamy równość $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ tak, by pozbyć się pierwiastków:

$$x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$$

$$x^4 - 10x^2 + 25 = (x^2 - 5)^2 = 24$$

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Otrzymujemy:

$$a = 0, \quad b = -10, \quad c = 0, \quad d = 1.$$

Sposób II
Podstawimy $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ do równania. W tym celu obliczamy

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \qquad x^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}, \qquad x^4 = 49 + 20\sqrt{6}.$$

Widzimy, że liczba $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest rozwiązaniem równania

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

dokładnie wtedy, gdy

$$49 + 20\sqrt{6} + a \cdot (11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}) + b \cdot (5 + 2\sqrt{6}) + c \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + d = 0,$$

czyli

$$(49 + 5b + d) + (11a + c)\sqrt{2} + (9a + c)\sqrt{3} + (20 + 2b)\sqrt{6} = 0.$$

Powyższa równość jest prawdziwa, jeśli $(49 + 5b + d) = 0$, $(11a + c) = 0$, $(9a + c) = 0$ i $(20 + 2b) = 0$. Łatwo znajdujemy liczby całkowite a, b, c, d spełniające te warunki. Z równania $20 + 2b = 0$ mamy $b = -10$, więc z równania $49 + 5b + d = 0$ dostajemy $d = 1$. Z równań $11a + c = 0$ i $9a + c = 0$ mamy $a = c = 0$.

Zadanie 4. *W każdym polu kwadratowej tablicy o wymiarach 7×7 umieszczono liczbę 1 lub -1. Niech x_k oznacza iloczyn wszystkich liczb stojących w k-tej kolumnie, a y_k oznacza iloczyn wszystkich liczb stojących w k-tym wierszu (dla każdego k takiego, że $1 \leqslant k \leqslant 7$). Czy może się zdarzyć, że $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 + y_1 + y_2 + \ldots + y_7 = 0$?*

Przypuśćmy, że

$$(*) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_7 + y_1 + y_2 + \ldots + y_7 = 0.$$

Liczby x_i, y_j są równe 1 lub -1. Niech wśród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_7$ liczba 1 występuje r razy, a liczba -1 występuje $7 - r$ razy. Wówczas z równości $(*)$ wynika, że wśród liczb $y_1, y_2, \ldots, y_7$ liczba 1 występuje $7 - r$ razy, a liczba -1 występuje r razy. W takim razie

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_7 = 1^r \cdot (-1)^{7-r} = (-1)^7 \cdot (-1)^{-r} = -(-1)^r,$$

zaś

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_7 = 1^{7-r} \cdot (-1)^r = (-1)^r.$$

To jest niemożliwe, gdyż

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_7 = y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_7,$$

jako iloczyn wszystkich liczb w tablicy. Zatem nasze przypuszczenie $(*)$ było fałszywe.