III Matematyczne Igrzyska Dolnej Wisły

Grudziądz 2 czerwca 2001 roku

Szkice rozwiązań zadań dla klas drugich i trzecich

Zadanie 1. *Wykaż, że jeżeli liczba rzeczywista a jest rozwiązaniem równania*

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

to liczba $a^2 - 2$ też jest rozwiązaniem tego równania.

Jeśli liczba a jest rozwiązaniem równania

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

to mamy:

$$a^3 = 3a - 1,$$

$$a^4 = a \cdot a^3 = a \cdot (3a - 1) = 3a^2 - a,$$

$$a^6 = (a^3)^2 = (3a - 1)^2 = 9a^2 - 6a + 1.$$

W takim razie dla $x = a^2 - 2$ otrzymujemy

$$(a^2-2)^3 - 3(a^2-2) + 1 = a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 8 - 3a^2 + 6 + 1 =$$

$$= 9a^2 - 6a + 1 - 6(3a^2 - a) + 9a^2 - 1 = 0,$$

czyli $a^2 - 2$ też jest rozwiązaniem naszego równania.

Zadanie 2. *Dany jest prostokąt $ABCD$. Prosta prostopadła do przekątnej AC, przechodząca przez wierzchołek C, przecina proste AB i AD w punktach K i L, odpowiednio. Udowodnij, że*

$$|AC|^3 = |BK| \cdot |DL| \cdot |KL|.$$

Wprowadźmy oznaczenia (zrób rysunek):

$$|AK| = a,\quad |AL| = b,\quad |KL| = c,\quad |AC| = d,$$

$$|KC| = p,\quad |LC| = q,\quad |BK| = x,\quad |DL| = y.$$

Z podobieństw odpowiednich trójkątów otrzymujemy proporcje

$$\frac{x}{p} = \frac{a}{c},\qquad \frac{y}{q} = \frac{b}{c},\qquad \frac{p}{d} = \frac{a}{b},\qquad \frac{q}{d} = \frac{b}{a}.$$

Zatem

$$xy = \frac{x}{p} \cdot \frac{y}{q} \cdot \frac{p}{d} \cdot \frac{q}{d} \cdot d^2 = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} \cdot d^2 = \frac{abd^2}{c^2}.$$

Z podobieństwa trójkątów ACK i LAK mamy

$$\frac{d}{a} = \frac{b}{c},\qquad \text{skąd}\qquad d = \frac{ab}{c}.$$

W takim razie

$$cxy = c \cdot \frac{abd^2}{c^2} = \frac{ab}{c} \cdot d^2 = d^3.$$

Zadanie 3. *W każdym polu prostokątnej tablicy umieszczono jakąś liczbę rzeczywistą. Wiadomo, że liczba stojąca w k-tym wierszu i l-tej kolumnie jest równa iloczynowi sumy liczb k-tego wiersza i sumy liczb l-tej kolumny (dla dowolnych k i l). Wykaż, że suma wszystkich liczb tablicy jest równa 1 lub wszystkie liczby są równe 0.*

Niech a_{kl} oznacza liczbę stojącą w k-tym wierszu i l-tej kolumnie. Wprowadźmy oznaczenia:

$$S_k = \sum_l a_{kl},\quad T_l = \sum_k a_{kl},\quad R = \sum_{k,l} a_{kl} = \sum_k S_k = \sum_l T_l.$$

(S_k to suma liczb stojących w k-tym wierszu, T_l – suma liczb w l-tej kolumnie, a R to suma wszystkich liczb w tablicy.)
Z warunków zadania

$$S_k \cdot T_l = a_{kl}$$

dla dowolnych k, l. W takim razie

$$R^2 = (\sum_k S_k) \cdot (\sum_l T_l) = \sum_{k,l} (S_k \cdot T_l) = \sum_{k,l} a_{kl} = R,$$

skąd

$$R = 1 \quad \text{lub} \quad R = 0.$$

Jeśli $R = 0$, to dla dowolnego k mamy

$$S_k = \sum_l a_{kl} = \sum_l (S_k \cdot T_l) = S_k \cdot \sum_l T_l = S_k \cdot R = 0.$$

Wówczas dla dowolnych k i l otrzymujemy

$$a_{kl} = S_k \cdot T_l = 0,$$

co kończy dowód.

Zadanie 4. *Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Podaj przykład liczby naturalnej r i skończonego ciągu liczbowego*

$$a_0, a_1, \ldots, a_r,$$

w którym dla każdego k ($0 \leqslant k \leqslant r$) liczba k występuje dokładnie a_k razy, przy czym $a_0 = n$.

Dla $n = 1$ mamy $r = 3$ i ciąg

$$a_0 = 1,\quad a_1 = 2,\quad a_2 = 1,\quad a_3 = 0.$$

Dla $n = 2$ mamy $r = 4$ i ciąg

$$a_0 = 2,\quad a_1 = 1,\quad a_2 = 2,\quad a_3 = 0,\quad a_4 = 0.$$

Dla $n \geqslant 3$ mamy $r = n + 3$ i ciąg

$$a_0, a_1, \ldots, a_r,$$

określony następująco:

$$a_k = \begin{cases} n & \text{dla} \quad k = 0 \\ 2 & \text{dla} \quad k = 1 \\ 1 & \text{dla} \quad k = 2, n \\ 0 & \text{dla} \quad k > 2, k \neq n \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że powyższe ciągi spełniają warunki zadania. Czy istnieją jakieś inne przykłady takich ciągów?