

III MATEMATYCZNE IGRZYSKA DOLNEJ WISŁY

Grudziądz

2 czerwca 2001 roku

Zadania dla klas drugich i trzecich

Zadanie 1. Wykaż, że jeżeli liczba rzeczywista a jest rozwiązaniem równania

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

to liczba $a^2 - 2$ też jest rozwiązaniem tego równania.

Zadanie 2. Dany jest prostokąt $ABCD$. Prosta prostopadła do przekątnej AC , przechodząca przez wierzchołek C , przecina proste AB i AD w punktach K i L , odpowiednio. Udowodnij, że

$$|AC|^3 = |BK| \cdot |DL| \cdot |KL|.$$

Zadanie 3. W każdym polu prostokątnej tablicy umieszczono jakąś liczbę rzeczywistą. Wiadomo, że liczba stojąca w k -tym wierszu i l -tej kolumnie jest równa iloczynowi sumy liczb k -tego wiersza i sumy liczb l -tej kolumny (dla dowolnych k i l). Wykaż, że suma wszystkich liczb tablicy jest równa 1 lub wszystkie liczby są równe 0.

Zadanie 4. Dana jest liczba naturalna $n \geq 1$. Podaj przykład liczby naturalnej r i skończonego ciągu liczbowego

$$a_0, a_1, \dots, a_r,$$

w którym dla każdego k ($0 \leq k \leq r$) liczba k występuje dokładnie a_k razy, przy czym $a_0 = n$.

Początek: 10²⁰. Koniec: 12⁵⁰. Czas rozwiązywania zadań: 150 minut.

Za każde zadanie można otrzymać od 0 do 5 punktów.

Życzymy powodzenia.