1 Ile to jest $3^{\sqrt{2}}$?

1.1 Wstęp

Pozornie banalne wyrażenie $3^{\sqrt{2}}$ zupełnie niespodziewanie kryje bardzo szeroki kawałek matematyki. Dla niektórych liczba zdefiniowana tym wzorem jest całkiem intuicyjnia, niektórzy mniej obeznani w matematyce w ogóle kwestionują jak można taką liczbę policzyć. Jednak daje się to zrobic, $3^{\sqrt{2}} \simeq 4.728804386$, choć jest to tylko przybliżenie dzisiętne. Istotnie liczba ta jest niewymierna, a wiedza potrzebna do zrozumienie jej istoty nie jest mala.

1.2 Konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych

W czasach gdy matematyka jeszcze raczkowała, w starożytnych czasach ludzie przywiązywali niesłychanie dużą wagę do liczb naturalnych. Rzeczywiście nawet dzisiaj większość ludzi zapytanych o pierwszą liczbę która przychodzi im do głowy podadzą jakąś liczbę naturalną. Dlaczego ten zbiór jest tak istotny? Ma on pewną użyteczną własność, mianowicie zlicza elementy zbiorów dyskretnych. W dzisiejszej terminologii jako zbiór liczb naturalnych oznaczamy $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Czasem dodaje się jeszcze zero, starożytni mieli z zerem trochę kłopotu, minęło sporo lat zanim ludzie dobrze zrozumieli pojęcie zbioru pustego. Zbiór liczb naturalnych ma jednak dość ubogą strukturę algebraiczną, jest zaledwie monoidem. Już starożytni poczuli potrzebę rozszeżenia tego zbioru tak aby był domknięty na operację odejmowania. Dzisiaj zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$ wydaje się równie intuicyjny jak zbiór liczb naturalnych. W przeszłości jednak tak nie było, ludzkość przyzwyczajała się do liczb całkowitych przez tysiące lat, a niektóre plemiona w środkowej Afryce, pozbawione kontaktów z cywilizacją europejską nie potrafią zrozumieć tego pojęcia do dziś! Zbiór liczb całkowitych, pomimo, że pozornie niewiele rozni się od liczb naturalnych, ma znacznie bogatszą strukturę algebraiczną, stanowi on pierścień przemienny z jedynką, a zatem jest grupą przemienną (abelową) na działanie addytywne, działanie multiplikatywne jest rozdzielne względem addytywnego, łączne i przemienne. Ponadto istnieje element neutralny ze względu na dzialanie multiplikatywne (1). Liczby całkowite pomimo swojej interesującej struktury algebraicznej nie miały wielkiego zastosowania w początkach matematyki. Mialy podstawową wadę: zupełnie nie nadawały się do mierzenia odcinków. Potrzebny był zbiór ciągły, który można by zastosować w geometrii (która w dawnych czasach była synonimem matematyki). Rozwiązaniem owych problemów krótko wydawał się być zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. W czasach starożytnych zbiór liczb wymiernych powstał jakby na zamówienie uczonych zajmujących się geometrią, którzy chcieli przypisywać długość dowolnym odcinkom. Dzisiaj możemy łatwo napisać elegancką definicję zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$. Okazuje się, że starożytni mieli całkiem dobrego nosa. Liczbami wymiernymi da się mierzyć wszystkie odcinki jakie jestesmy w stanie narysować czy też wytworzyć. Zbiór $\mathbb{Q}$ jest gęsty, to znaczy między każdymi dwoma liczbami wymiernymi można znaleźć nieskończenie wiele innych liczb wymiernych. Dowód tego faktu jest trywialny, wystarczy zauważyć że średnia arytmetyczna dwóch liczb wymiernych też jest liczbą wymierną. Długość każdego odcinka mozna zatem dowolnie blisko przybliżyć liczbą wymierną. Przez pewien czas wydawalo się, że ta praktyczna elegancja zbioru liczb wymiernych idzie w parze z elegancją matematyczną, że każdy punkt prostej to liczba wymierna. Niestety szybko okazało się, iż tak dobrze nie jest. Podobno odkrył to jeden z pitagorejczyków, inni gdy się o tym dowiedzieli nakazali mu milczenie, a efekcie zabili go, wierząc że prawda nigdy nie wyjdzie ujrzy światła dziennego. Łatwo pokazać następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.2.1 *Liczba $\sqrt{2}$ będąca jednym z rozwiązań równania $x^2 = 2$ nie jest liczbą wymierną.*

Dowód 1.2.2 *Przez sprzeczność: załóżmy że jest liczbą wymierną. Wtedy dla pewnych $p, q \in \mathbb{Z} \wedge NWD(p, q) = 1$:*

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu otrzymujemy:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Mnożąc obustronie przez q^2:

$$2q^2 = p^2$$

Zatem p^2 jest liczbą przystą. Ale z tego wynika, że samo p jest parzyste. Zatem $p = 2k$, co po podniesieniu do kwadratu daje $p^2 = 4k^2$. Zatem:

$$2q^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2$$

Z czego wynika, że q jest liczbą parzystą. A to stoi w sprzeczności z założeniem $NWD(p, q) = 1$.

W zupełnie analogiczny sposód daje się dowieść nieco bardziej ogólne twierdzenie:

Twierdzenie 1.2.3 *Dla dowolnej liczby $n, p \in \mathbb{N}, n > 1$, liczba $\sqrt[n]{p}$ jest albo całkowita, albo niewymierna. Ponadto gdy p jest liczbą pierwszą, to $\sqrt[n]{p}$ jest zawsze niewymierna.*

Okazuje się zatem, że liczby wymierne nie wyczerpują wszystkich możliwych długości odcinków.

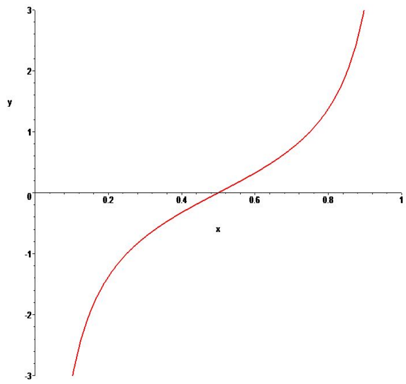
Zbiór liczb wymiernych ma w istocie dość bogatą strukturę algebraiczną. Jest ciałem, jednocześnie jednowymiarową przestrzenią liniową. Z punktu widzenia topologicznego, zbiór liczb wymiernych jest otwarty, jego domknięciem jest cały zbiór liczb rzeczywistych. Zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, dowodzi tego choćby konstrukcja przekątniowa Cantora, ze względu na moc jest to minimalny zbiór mający strukturę ciała charakterystyki 0. Po zsumowaniu zbioru liczb wymiernych i niewymiernych otrzymujemy zbiór nazywany powszechnie zbiorem liczb rzeczywistych ($\mathbb{R}$). Jak się niedługo okaże zbiór ten jest względnie kompletny w senie algebraicznym (jest ciałem), jak i w sensie topologicznym (graica każdego ciągi liczb rzeczywistych o ile istnieje i jest skończona wpada z powrotem do $\mathbb{R}$.

Istotne dla naszych rozważań będzie następujące:

Twierdzenie 1.2.4 *Zbiór liczb rzeczywistych nie jest przeliczalny.*

Dowód 1.2.5 *Aby udowodnić ten fakt potrzebnych będzie kilka małych lematów:*

Lemat 1.2.6 *Zbiór liczb rzeczywistych jest równoliczny z odcinkiem (0,1).*
Dla sprawdzenia lematu potrzeba pokazać różnowartościowe przekształcenie ocinka w prostą. Wystarczy wziąć funkcję $tg((x - \frac{1}{2}) \cdot \pi)$



Lemat 1.2.7 *Każdą liczbę rzeczywistą z odcinka (0,1) da się przedstawić jako ciąg jedynek i zer. Przedstawienie to jest jednoznaczne z dokładnością do nieskończonych rozwinięć okresowych.*
Weźmy szereg:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{1}{2^i} \qquad a_i \in \{0, 1\}$$

Poprzez dobienie a_n *jako zer lub jedynek, jego suma częściowa może zbliżyć się dowolnie blisko do każdej liczby z przedziału (0,1). Pozostaje kwestia równoważności zapisów 0111111... i 1000... Powyższa niedogodność jednak nie zmienia faktu że odcinek (0,1) jest równoliczny ze zbiorem* $\{0, 1\}^{|\mathbb{N}|}$*. Wynika to z faktu,że ciągow które zawierają prawie same jedynki jak i zera jest tylko przeliczalnie wiele, wszystkich zaś ciągow jest więcej co będzie pokazane kilka linijek niżej. Skąd inąd wiadomo, że elementów odcinka (0,1) jest nieskończenie wiele, utożsamienie zatem przeliczalnej rodziny ciągow nie ma wpływu na odpowiednie bijekcje.*

Lemat 1.2.8 $|\{0, 1\}^{|\mathbb{N}|}| > |\mathbb{N}|$.
Oczywiście widać, że $|\{0, 1\}^{|\mathbb{N}|}| = |2^{\mathbb{N}}|$*, można bowiem wskazać trywialną bijekcję między ciągami zero-jedynkowymi i podzbiorami* $\mathbb{N}$*:*

$$f : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0, 1\}^{|\mathbb{N}|}$$

$$f(A) = (a_1, a_2, ...); a_n = 0 \Leftrightarrow n \notin A; a_n = 1 \Leftrightarrow n \in A;$$

Oraz:

$$f^{-1} : \{0, 1\}^{|\mathbb{N}|} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$$

$$f^{-1}(a_1, a_2, ...) = A; n \notin A \Leftrightarrow a_n = 0; n \in A \Leftrightarrow a_n = 1;$$

Moc zbioru podzbiorów $\mathbb{N}$ *jest ostro większa od mocy* $\mathbb{N}$*, co wynika z podstawowych twierdzeń teorii mnogości.*

Reasumując, $\mathbb{R}$ jest równoliczny z odcinkiem (0,1) który to jest równoliczny ze zbiorem $2^{\mathbb{N}}$, który to nie jest przeliczalny, co dowodzi twierdzenia.

Twierdzenie 1.2.9 *Zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny.*

Dowód 1.2.10 *Wystarczy wskazać bijekcję między zbiorem liczb naturalnych a zbiorem liczb wymiernych. Do tej potrzeby będziemy utożsamiać $\frac{p}{q} \sim (p, q)$. W ten sposób szukamy bijekcji między zbiorem par uporządkowanych z $\mathbb{N}$. Zakładamy że $p, q > 0$, oczywiście zbiór liczby wymiernych dodatnich jest równoliczny ze zbiorem liczb wymiernych ujemnych, zatem powyższe uproszczenie nie ma wpływu na ogólność rozumowania. Bijekcja zadan jest wzrorem:*

$$\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\pi(p, q) = 2^p \cdot (2 \cdot q + 1) - 1$$

Funkcja ta posiada funkcję odwrotną zadaną przez dwie składowe:

$$\pi_1^{-1}(n) = max(p, p \in \mathbb{N} \wedge 2^p | n + 1)$$

$$\pi_2^{-1}(n) = \frac{1}{2}(\frac{n+1}{\pi_1^{-1}(n)} - 1)$$

Udowodnione wyżej fakt pokazują że zbiór liczb niewymiernych jest nieprzeliczalny, zatem istotnie większy od zbioru liczb wymiernych. Zatem prawie każda liczba rzeczywista jest niewymierna!

1.3 Przekroje Dedekinda

Kluczowe znaczenie w badaniu zbioru liczb rzeczywistych miały pojęcie przekrojów jakie wprowadził Dedekind.

Definicja 1.3.1 *Przekrojem Dedekinda przez zbiór liczb rzeczywistych wzdłóż liczb wymiernych nazywamy taki podział zbioru liczb rzeczywistych na dwa niepuste podzbiory A i B że:*
a) Każda liczba wymierna należy do A lub do B.
b) Każda liczba wymierna należąca do A jest mniejsza od każdej liczby należacej do B.

Zbiór A nazywamy klasą dolną, a B klasą górną. Istnienie przekrojów nie jest oczywiste bez dobrego określenia relacji większości-mniejszości na $\mathbb{R}$. Łatwo jest taką relację jednak zdefiniować dla liczb wymiernych (jest to relacja dziedziczona z relacji obowiązującej wśród liczb całkowitych:

$$a = \frac{p_1}{q_1}, b = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q} \quad a, b > 0, a < b \Leftrightarrow a \neq b \wedge p_1 \geq p_2 \wedge q_1 \leq q_2$$

Podobnie relację definiuje się dla liczb wymiernych mniejszych od zera, przy czym można założyć, że każda liczba wymierna ujemna jest mniejsza od każdej dodatniej.

Wracając do przekrojów Dedekinda, łatwo zauważyć, że możliwe są następujące przypadki:
1) W klasie dolnej istnieje liczba największa, a w klasie górnej nie istnieje liczba

najmniejsza.
2) W klasie górnej istnieje liczba najmniejsza, a w klasie dolnej nie istnieje liczba największa.
3) W klasie dolnej nie istnieje liczba największa oraz w klasie górnej nie istnieje liczba najmniejsza.

Przekroje trzeciego rodzaju są najciekawsze, gdyż wyznaczają lukę w zbiorze liczb wymiernych, oraz liczbę niewymierną która tę lukę wypełnia. Można teraz potraktować zbiór liczb rzeczywistych jako zbiór wszystkich możliwych przekrojów Dedekinda, oraz wyznaczyć odpowiednie własności wynikające z odpowiednich akcjomatów teorii mnogości:

$$[A, B] \leq [C, D] \Leftrightarrow A \subseteq C(D \subseteq B)$$
$$[A, B] < [C, D] \Leftrightarrow A \subset C(D \subset B)$$
$$[A, B] + [C, D] := [A + C, B + D] \quad A + C := \{a + c; a \in A, c \in C\}$$
$$-[A, B] := [-A, -B]$$
$$[A, B] - [C, D] := [A, B] + (-[C, D])$$
$$[A, B] \cdot [C, D] := [\mathbb{Q}/B \cdot D, B \cdot D] \quad B \cdot D := \{b \cdot d, b \in B, d \in D\}$$

Utożsamienie liczb rzeczywistych z przekrojami Dedekinda pozwala zauważyć, że liczby niewymierne zachowują się dość grzecznie, to znaczy można na nie przenieść relację porządku, oraz wykonywać dzialania. W efekcie można wypisać 15 podstawowych praw, które liczby rzeczywiste spełniają:

1)Element neutralny dodawania:

$$a + 0 = a$$

2) Przemienność dodawania:

$$a + b = b + a$$

3) Łączność dodawania:

$$a + (b + c) = (a + c) + b$$

4) Jednoznaczność rozwiązań równości:

$$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$$

5) Element neutralny mnożenia:

$$a \cdot 1 = a$$

6) Przemienność mnożenia:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

7) Łączność mnożenia:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

8) Jednoznaczność rozwiązań:

$$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$$

9) Rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

10) Dzielenie:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

11) Dodawanie do stron nierówności:

$$a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c$$

12) Mnożenie nierówności stronami:

$$a \geq b \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c \quad c > 0$$

13) Mnożenie nierówności stronami:

$$a \geq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \quad c < 0$$

14) Nieujemność modułu:

$$|a| \geq 0$$

15) Nierówność trójkąta dla modułu:

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

Posiadając odpowiednią definicję oraz własności liczb rzeczywistych, a także podstawowe intuicje dotyczące jego struktury, można przystąpić do definicji narzędzi potrzebnych do dobrego określenia liczby $3^{\sqrt{2}}$

1.4 Elementy analizy rzeczywistej

Kilka razy pojawiło się już pojęcie ciągu liczb rzeczywistych. Dla pełego zrozumienia tego pojęcia potrzebna jest formalizacja:

Definicja 1.4.1 *Ciągiem liczb rzeczywistych nazywamy odzorowanie* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *to znaczy każdej liczbie naturalnej przyporządkowywujemy jakąś liczbę rzeczywistą.*

Ciągi liczb rzeczywistych mogą mieć sporo własności, takie jak monotoniczność czy ograniczoność. Do naszego celu potrzebna będzie formalna definicja bardzo istonej własności niektórych ciągów, mianowicie zbieżności:

Definicja 1.4.2 *Ciąg* a_n *nazywa się zbieżnym do liczby* $g \in \mathbb{R}$ *jeśli:*

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n>n_0, n \in \mathbb{N}} \quad |a_n - g| < \epsilon$$

Zbieżność do granicy nie jest własnością zupełnie powszechną, można jednak udowodnić:

Lemat 1.4.3 *Weistrassa. Jeśli ciąg jest ograniczony i monotoniczny to jest zbieżny.*

Dowód 1.4.4 *Bez straty ogólności rozumowania załóżmy że ciąg jest rosnący. Dla innych rodzajów monotoniczności dowód przebiega analogcznie. Niech C będzie zbiorem elementów tego ciągu. Niech* $g = sup(C)$. *Kres owy istnieje, gdyż zbiór jest ograniczony z góry. Wtedy mamy, że* $a_n < g$ *oraz* $a_{n+1} > a_n$. *Udowodnimy, że g jest granicą* a_n. *Przez sprzeczność, załóżmy przeciwnie, że istnieje takie* ϵ, *że:*

$$|a_n - g| = g - a_n > \epsilon$$

Dla każdego n. Ale to oznacza, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$a_n < g - \epsilon$$

To z kolei przeczy założeniu, że g jest kresem górnym zbioru C, gdyż z własności kresu górnego dla każdego ϵ *istnieje* n_ϵ, *że* $g - a_n < \epsilon$. *Ponieważ* a_n *jest rosnący, zatem powyższa własność zachodzi dla każdego* $n > n_\epsilon$. *Uzyskana sprzeczność dowodzi lematu.*

Niewielkim kosztem można wywnioskować jeszcze jedno istotne twierdzenie:

Twierdzenie 1.4.5 *O dwóch ciągach. Jeśli wyrazy pewnego ciągu rosnącego są zawsze mniejsze od wyrazów pewnego ciągu malejącego, to oba te ciągi są zbieżne i granica pierwszego jest nie większa od granicy drugiego.*

Sumując wiedzę o ciągach i o przekrojach Dedekinda, można wyciągnąć następujące wnioski:

a) Każdą liczbę niewymierną można uzyskać jako granicę pewnego ciągu liczb wymiernych.
b) Każdą liczbę niewymierną można przybliżać ciągiem lizcb wymiernych ostro większych od niej, oraz ciągiem liczb wymiernych ostro mniejszych od niej.

Wnioski owe będą miały istotne znaczenie dla zrozumienia istoty liczby $3^{\sqrt{2}}$.

1.5 Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą podobnie jak większość pojęć dotyczących liczb rzeczywistych kontruuje się po kolei, najpierw na polu liczb naturalnych gdzie definicja ta jest najbardziej intuicyjna, następnie dla liczb całkowitych, wymiernych i wreszcie niewymiernych. Kontrukcja ta przebiega mniej więcej tak (dla uproszczenia rozumowania zakładamy, że podstawa potęgi będzie większa niż jeden):
a) Wybierzmy liczbę rzeczywistą α. Przez

$$\alpha^n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

określamy $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot ... \cdot \alpha}_{n}$. Oczywiście funkcja ta jest rosnąca, bo gdy $\alpha > 1$ mamy:

$$\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha^{n+1} > \alpha^n$$

b) Rozszerzamy funkcję w następujący sposób:

$$\alpha^0 = 1 \quad \wedge \quad \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

Funkcja ta oczywiście jest nadal rosnąca, bo mamy:

$$\frac{1}{\alpha^{n+1}} < \frac{1}{\alpha^n}$$

c) Rozszerzamy funkcję na ułamki w postaci $\frac{1}{n}$, kładziemy:

$$x = \alpha^{\frac{1}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad x^n = \alpha$$

Tak określona funkcja nadal jest rosnąca, bo mamy:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad \alpha^{\frac{1}{n}} > \alpha^{\frac{1}{m}}$$

Można to wykazać zauważając:

$$x^n = \alpha \wedge y^m = \alpha \wedge m > n \Leftrightarrow \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{n} = \alpha \wedge \underbrace{y \cdot ... \cdot y}_{n} \cdot \underbrace{y \cdot ... \cdot y}_{m-n} = \alpha$$

Ponieważ zarówno x jak i y są większe od jedynki, mamy:

$$\underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{n} = \underbrace{y \cdot ... \cdot y}_{n} \cdot \underbrace{y \cdot ... \cdot y}_{m-n} \Leftrightarrow y < x$$

Co kończy dowód faktu.
d) Określamy funkcję dla ułamków w postaci $\frac{p}{q}$

$$\alpha^{\frac{p}{q}} = (\alpha^p)^{\frac{1}{q}}$$

Z własności udowodnionych wyżej wynika, że tak określona funkcja jest nadal rosnąca.
e) Najważniejsze i najciekawsze jest określenie wartości funkcji α^x dla dowolnej liczby rzeczywistej, także niewymienrnej. W tym celu trzeba posłóżyć się elementami teorii wcześniej przywołanymi. Niech $x \in \widetilde{\mathbb{Q}}$ będzie liczbą niewymierną. Wyznacza ona zatem przekój Dedekinda trzeciego rodzaju, kóry rozdziela zbiór liczb wymiernych na klasę dolną A i klasę górną B. Ponieważ zbiór liczb wymiernych jest gęsty, można zatem skonstruować ciągi odpowiednio a_n i b_n takie, że a_n należy do klasy dolnej i jest rosnący oraz b_n należy do klasy górnej i jest malejący. Oczywiście na mocy Lematu Weistrassa obydwa te ciągi posiadają granicę. Spośród wszystkich ciągów o takich własnościach można wybrać takie które spełniają własności:
1) Dla każdej liczby r z klasy dolnej i granicy $a_n \to a$ zachodzi $r < a$
2) Dla każdej liczby t z klasy górnej i granicy $b_n \to b$ zachodzi $t > b$
Stąd łatwo wywnioskować że $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = sup(A) = inf(B) = x$
Zatem dla każdej liczby niewymiernej można skonstruować ciąg liczb wymiernych przybliżających ją z dołu oraz ciąg liczb wymiernych przybliżających ją z góry. Konstrukcja funkcji wykładniczej dla liczby niewymiernej wygląda tak:

$$\alpha^{a_n} < \alpha^x < \alpha^{b_n}$$

Przy czym odpowiednie ciągi zachowują się monotonicznie i mamy:

$$\alpha^{a_n} < \alpha^{a_{n+1}} < \alpha^x < \alpha^{b_{n+1}} < \alpha^{b_n}$$

Stąd:

$$\alpha^x =^{def} \lim_{n\to\infty} \alpha^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \alpha^{b_n}$$

Odpowiednie granice istnieją, co wynika z faktu że funkcja wykładnicza jest dla liczb wymiernych rosnąca, oraz z twierdzenia o dwóch ciągach. Trzeba jeszcze pokazać że są one równe, ale

$$\forall_{\epsilon\in\mathbb{Q}}\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}|b_n - b| < \epsilon \wedge |a_n - a| < \epsilon$$

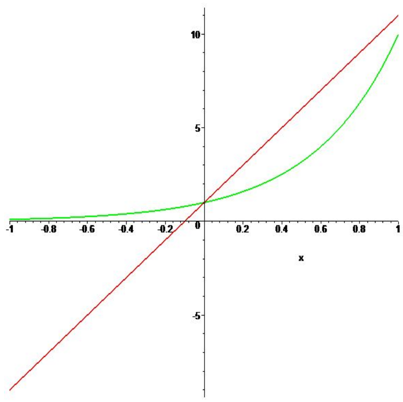
zatem:

$$b_n - a_n < 2\epsilon$$

$$1 = \alpha^0 < \alpha^{b_n - a_n} < \alpha^{0+2\epsilon}$$

$$\frac{\alpha^{b_n}}{\alpha^{a_n}} < \alpha^{0+2\epsilon} < \alpha^0 \cdot \alpha^{2\epsilon} < 1 + 2\alpha\epsilon$$

Zastosowana tu nierówność wymaga komentarza. ϵ jest blisko zera, zaś w pewnym otoczeniu prawostronnym zera funkcja wykładnicza jest mniejsza od pewnej funkcji liniowej. W szczególności $\alpha^x < 1 + \alpha \cdot x$ na przedziale (0,1). Obrazuje to poniższy rysunek:



Stąd

$$\frac{\alpha^b}{\alpha^a} = 1 \Leftrightarrow \alpha^a = \alpha^b$$

Zatem funkcja jest dobrze określona. Łatwo zauważyć że funkcja wykładnicza zachowuje monotoniczność także dla liczb niewymiernych.
Można teraz już łatwo zobaczyć czym jest liczba $3^{\sqrt{2}}$. Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, $3 > 1$ zatem wszystko pasuje pod pokazany wyżej schemat. Ostatecznie możemy wziąć ciągi przybliżeń dziesiętnych liczby $\sqrt{2}$:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$

$$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$$

$$1.414213562 < \sqrt{2} < 1.414213563$$

Zatem mamy:

$$3 = 3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2 = 9$$

$$4.655536722 = 3^{1.4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.5} = 5.196152423$$

$$4.706965002 = 3^{1.41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.42} = 4.758961394$$

$$4.727695035 = 3^{1.414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.415} = 4.732891793$$

$$4.728733930 = 3^{1.4142} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.4143} = 4.729253463$$

$$4.728804386 = 3^{1.414213562} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.414213563} = 4.728804391$$

Ostatecznie

$$3^{\sqrt{2}} \simeq 4.7288043878374149478942833404160053668397164$$

$$4254840000789382064017840312713095694467933192221216416$$

Liczba ta jest dobrze określona dlatego, że potrafimy ją dowolnie blisko przybliżać.

Filip Piękniewski 2002